

Métriques autoduales sur la boule

Olivier Biquard

1^{er} février 2008

Abstract

A conformal metric on a 4-ball induces on the boundary 3-sphere a conformal metric and a trace-free second fundamental form. Conversely, such a data on the 3-sphere is the boundary of a unique selfdual conformal metric, defined in a neighborhood of the sphere. In this paper we characterize the conformal metrics and trace-free second fundamental forms on the 3-sphere (close to the standard round metric) which are boundaries of selfdual conformal metrics on the whole 4-ball.

When the data on the boundary is reduced to a conformal metric (the trace-free part of the second fundamental form vanishes), one may hope to find in the conformal class of the filling metric an Einstein metric, with a pole of order 2 on the boundary. We determine which conformal metrics on the 3-sphere are boundaries of such selfdual Einstein metrics on the 4-ball. In particular, this implies the Positive Frequency Conjecture of LeBrun.

The proof uses twistor theory, which enables to translate the problem in terms of complex analysis; this leads us to prove a criterion for certain integrable CR structures of signature (1,1) to be fillable by a complex domain.

Finally, we solve an analogous, higher dimensional problem: selfdual Einstein metrics are replaced by quaternionic-Kähler metrics, and

2000 Mathematics Subject Classification: 53C25, 32G07, 53C28, 53C26

conformal structures on the boundary by quaternionic contact structures (previously introduced by the author); in contrast with the 4-dimensional case, we prove that any small deformation of the standard quaternionic contact structure on the $(4m-1)$ -sphere is the boundary of a quaternionic-Kähler metric on the $(4m)$ -ball.

Cet article est consacré à la construction de métriques riemanniennes autoduales. En dimension 4, le tenseur de Weyl d'une métrique riemannienne g se décompose en composantes autoduale et antiautoduale, $W = W_+ + W_-$, et la métrique est dite autoduale si $W_- = 0$; cette propriété ne dépend d'ailleurs que de la classe conforme $[g]$ de la métrique.

Une métrique conforme sur une variété à bord induit sur le bord la donnée conforme $[g, \mathcal{Q}]$, où g est la métrique et \mathcal{Q} la partie à trace nulle de la seconde forme fondamentale. Dans cet article, on résout, au voisinage de la métrique ronde, le problème suivant :

Problème 0.1. Quelles données $[g, \mathcal{Q}]$ sur la sphère S^3 sont les bords de métriques autoduales $[g]$ sur la boule B^4 ?

LeBrun [LeB82, LeB85] a montré que toute donnée de ce type est *localement* le bord d'une unique métrique autoduale ; de plus, dans le cas où $\mathcal{Q} = 0$, la métrique peut être prise d'Einstein, avec un pôle d'ordre 2 sur le bord : on dit alors que la métrique conforme sur le bord est l'*infini conforme* de la métrique qui remplit (ainsi, la métrique ronde sur S^3 est l'infini conforme de la métrique hyperbolique réelle sur B^4). Dans le cas d'une métrique invariante à gauche sur S^3 , une métrique autoduale d'Einstein explicite, globale, est connue : Pedersen [Ped86] a traité le cas des métriques de Berger, et Hitchin [Hit95] le cas général. Enfin, LeBrun [LeB91] a montré qu'il existe une famille de dimension infinie de métriques sur S^3 munies de remplissages par des métriques autoduales d'Einstein sur B^4 .

Cependant, il existe des obstructions à un tel remplissage : Hitchin [Hit97] a ainsi montré que l'invariant η d'une métrique riemannienne sur S^3 doit être négatif pour qu'existe un remplissage autodual d'Einstein.

Grâce à la construction twistorielle de Penrose, la construction de métriques autoduales se ramène à la construction de certaines variétés complexes de dimension 3. Une version de cette construction twistorielle, due à LeBrun [LeB84, LeB85], existe en dimension 3 pour les données $[g, \mathcal{Q}]$: l'espace des

twisteurs est alors une variété CR (intégrable) de dimension 5. Par exemple, l'espace des twisteurs de S^3 est l'hypersurface réelle $|z^1|^2 + |z^2|^2 = |z^3|^2 + |z^4|^2$ de l'espace projectif complexe P^3 , qui borde le domaine complexe

$$D = \{|z^1|^2 + |z^2|^2 \leq |z^3|^2 + |z^4|^2\} \subset P^3,$$

lui-même espace des twisteurs de B^4 . De cette manière, la question suivante généralise le problème 0.1.

Problème 0.2. Quelles structures CR sur ∂D sont les bords de déformations complexes de D ?

Cette question naturelle de géométrie complexe est difficile, car ∂D est de signature $(1,1)$, un cas où le théorème d'extension de Kiremidjian [Kir79] ne s'applique pas. Dans le cas pseudoconvexe, en dimension 3, par exemple pour la sphère S^3 , le problème a été beaucoup étudié, et largement résolu, dans une succession d'articles, notamment par Burns-Epstein [BE90], Lempert [Lem92], Epstein [Eps92], et Bland [Bla94]. Nous donnons, pour les structures CR intégrables proches de la structure standard sur ∂D , une condition nécessaire et suffisante, analogue à celle trouvée par ces auteurs ; elle est donnée en termes des coefficients de Fourier par rapport à une action de S^1 .

Théorème 0.3. *Une structure CR sur ∂D , proche de la structure standard, est le bord d'une déformation complexe de D si et seulement s'il existe une action de contact de S^1 sur ∂D , par rapport à laquelle la structure complexe s'écrit seulement avec des coefficients de Fourier positifs.*

Pour plus de précisions, voir le lemme 2.2 et le corollaire 4.2. Ajoutons qu'en réalité, on démontre cet énoncé en toute dimension, pour le bord d'un domaine qui est l'espace total d'un fibré en disques holomorphes, à forme de Levi non dégénérée. Dans notre situation, cela permet de décrire l'espace tangent aux structures CR remplissables parmi toutes les structures CR intégrables (théorème 8.3) ; toutes ne le sont pas ; en particulier, il existe une famille de dimension infinie de structures CR non remplissables (car la sous-variété des structures CR remplissables est de codimension infinie), voir le corollaire 8.4.

On montre aussi (corollaire 8.5) qu'existe sur ∂D une famille de dimension infinie de structures CR remplissables qui ne sont pas induites par une

déformation de ∂D comme hypersurface de P^3 : il s'agit d'un phénomène nouveau, qui est dû à la présence d'une valeur propre négative dans la forme de Levi, et tranche avec le théorème de Hamilton [Ham77], ou le théorème de stabilité de Lempert [Lem92] sur $S^3 \subset \mathbf{C}^2$.

Les espaces de twisteurs des métriques autoduales ont des propriétés supplémentaires : structure réelle, existence d'une famille de courbes rationnelles particulières, et structure de contact holomorphe si la métrique est d'Einstein. Cependant, on montre que la seule obstruction au remplissage autodual d'une donnée $[g, \mathcal{Q}]$ est le remplissage de la structure CR.

Théorème 0.4. *La donnée $[g, \mathcal{Q}]$ d'une métrique et d'une seconde forme fondamentale conformes sur S^3 , proche de la structure standard, est le bord d'une métrique autoduale sur B^4 si et seulement si l'espace des twisteurs de $[g, \mathcal{Q}]$ satisfait les conditions du théorème 0.3.*

Une métrique conforme $[g]$ sur S^3 est l'infini conforme d'une métrique autoduale d'Einstein sur B^4 si et seulement si l'espace des twisteurs de $[g]$ satisfait les conditions du théorème 0.3.

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante de remplissage : cette condition n'est pas facile à tester ; en particulier, on souhaiterait savoir s'il existe, en dehors des exemples connus, des $[g, \mathcal{Q}]$ qui soient remplissables par une métrique autoduale sur B^4 . Ce problème est résolu en appliquant le théorème 0.4 à une description (théorème 9.3) de la variété $\mathcal{B}_+/\text{Diff}_0 S^3$, où \mathcal{B}_+ désigne les $[g, \mathcal{Q}]$ remplissables (on ignore dans cette introduction les problèmes de régularité) et $\text{Diff}_0 S^3$ désigne le groupe des difféomorphismes de S^3 qui fixent deux points dans le fibré tangent projectivisé, de sorte que

$$\text{Diff} S^3 / \text{Diff}_0 S^3 = SO_{1,4},$$

le groupe des transformations conformes de S^3 ; on obtient notamment une description explicite de l'espace tangent $T(\mathcal{B}_+/\text{Diff}_0 S^3)$ en la métrique ronde.

En particulier, notons \mathcal{B} l'espace de toutes les données conformes $[g, \mathcal{Q}]$, et \mathcal{B}_- l'espace des $[g, \mathcal{Q}]$ remplissables par une métrique antiautoduale, alors on déduit du théorème 9.3 le résultat suivant.

Théorème 0.5. *Près de la métrique ronde, $\mathcal{B}_+/\text{Diff}_0 S^3$ et $\mathcal{B}_-/\text{Diff}_0 S^3$ sont deux sous-variétés transverses de $\mathcal{B}/\text{Diff}_0 S^3$, dont l'intersection est constituée des $[g, \mathcal{Q}]$ induits par une déformation de la sphère S^3 dans l'espace plat \mathbf{R}^4 .*

Remarquons que le théorème affirme en particulier que pour $[g, \mathcal{Q}]$ proche de la métrique ronde dans l'intersection $\mathcal{B}_+ \cap \mathcal{B}_-$, la métrique autoduale et la métrique antiautoduale qui remplissent coïncident, ce qui n'était pas évident a priori.

Restreignons-nous à présent au cas d'une métrique conforme sur le bord : notons \mathcal{M} l'espace des métriques conformes sur S^3 (en oubliant encore les questions de régularité). Rappelons que, dans ce cas, le théorème de Graham-Lee [GL91] fournit sur B^4 un unique remplissage d'Einstein ; notons \mathcal{M}_+ (resp. \mathcal{M}_-) l'espace des métriques conformes sur S^3 dont le remplissage d'Einstein est autodual (resp. antiautodual). Le théorème précédent s'applique aux métriques de la manière suivante (voir le théorème 10.1 pour une description explicite des espaces tangents).

Théorème 0.6. *Dans $\mathcal{M}/\text{Diff}_0 S^3$, les espaces $\mathcal{M}_+/\text{Diff}_0 S^3$ et $\mathcal{M}_-/\text{Diff}_0 S^3$ de métriques remplissables par une métrique d'Einstein autoduale ou antiautoduale sur B^4 , sont deux sous-variétés, telles qu'en la métrique ronde on ait la décomposition de l'espace tangent :*

$$T(\mathcal{M}/\text{Diff}_0 S^3) = T(\mathcal{M}_+/\text{Diff}_0 S^3) \oplus T(\mathcal{M}_-/\text{Diff}_0 S^3).$$

En particulier, cet énoncé implique immédiatement la conjecture de fréquence positive de LeBrun [LeB91] :

Corollaire 0.7. Conjecture de fréquence positive de LeBrun. *Une métrique g sur S^3 , proche de la métrique ronde, se décompose en $g = g_- + g_0 + g_+$, où $g_- + g_0$ (resp. $g_+ + g_0$) est l'infini conforme d'une métrique d'Einstein antiautoduale (resp. autoduale).*

Enfin, nous étudions une version naturelle de ce problème en dimension supérieure. Il est bien connu qu'existe en dimension $4m$ un analogue des métriques antiautoduales d'Einstein, les métriques *quaternion-kählériennes*, dont le prototype est la métrique hyperbolique quaternionnienne sur la boule B^{4m} . Dans [Biq00] (voir aussi le survey [Biq99]), j'ai étudié les infinis conformes des métriques quaternion-kählériennes, et ai appelé ces objets, qui vivent sur des variétés de dimension $4m - 1$, des *structures de contact quaternionniennes* (voir section 11) ; à partir de la dimension 11, une structure de contact quaternionnienne, analytique réelle, est l'infini conforme d'une unique

métrique quaternion-kählérienne, localement définie ; en dimension 7, une condition additionnelle d'intégrabilité (l'existence d'un espace de twisteurs) est requise.

L'analogie entre la dimension 4 et la dimension supérieure est due à la persistance, pour les métriques quaternion-kählériennes, d'une construction twistorielle ([Sal82], voir aussi [Bes87] ; on trouve la construction inverse dans [LeB89]) ; ainsi, la structure de contact quaternionnienne standard de la sphère S^{4m-1} a pour espace des twisteurs l'hypersurface réelle de P^{2m+1} d'équation

$$|z^1|^2 + |z^2|^2 + \dots + |z^{2m}|^2 = |z^{2m+1}|^2 + |z^{2m+2}|^2,$$

bord du domaine complexe

$$D = \{|z^1|^2 + |z^2|^2 + \dots + |z^{2m}|^2 < |z^{2m+1}|^2 + |z^{2m+2}|^2\} \subset P^{2m+1}$$

qui est l'espace des twisteurs de la boule B^{4m} munie de la métrique hyperbolique quaternionnienne.

La différence avec le cas de la dimension 4 est que le problème d'extension a toujours une solution positive.

Théorème 0.8. *Pour $4m \geq 12$, toute structure de contact quaternionnienne sur la sphère S^{4m-1} , proche de la structure standard, est l'infini conforme d'une métrique quaternion-kählérienne sur la boule B^{4m} . Pour $4m = 8$, le même résultat est valable, pourvu que la structure de contact quaternionnienne admette un espace de twisteurs (ce qui est toujours vrai en dimension supérieure).*

Évoquons maintenant les techniques utilisées dans cet article.

La méthode de remplissage (section 2) d'une structure CR est une méthode classique d'analyse complexe : le remplissage holomorphe suivant des disques (d'où la condition de positivité des coefficients de Fourier) ; cette technique est utilisée notamment dans l'article de Bland-Duchamp [BD91] sur la description de l'espace des modules des domaines de \mathbf{C}^n en termes de la représentation circulaire de Lempert [Lem81].

Pour montrer que le remplissage de la structure CR suffit pour obtenir le remplissage de $[g, \mathcal{Q}]$, la principale difficulté est, dans le cas $\mathcal{Q} = 0$, le remplissage de la structure de contact holomorphe (qui fournit la métrique

d'Einstein) : il s'agit de montrer que la donnée sur le bord est nécessairement à coefficients de Fourier positifs ; ce problème est traité dans la section 3 : la forme particulière de l'équation (non linéaire) permet de ramener le problème à l'analyse de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur les $(1,0)$ -formes.

Ce remplissage serait de peu d'intérêt si la condition de positivité des coefficients de Fourier n'était pas nécessaire : on montre que tel est le cas dans la section 4 ; le problème consiste, partant d'un domaine complexe proche du modèle, à reconstruire l'action de S^1 sur le bord, ce qui se fait en recherchant les disques extrémaux qui les remplissent ; on montre ici un théorème général de déformation de tels disques dans l'espace total d'un fibré en disques holomorphes, dont le bord a une forme de Levi non dégénérée. A priori, il est difficile de produire de tels disques extrémaux loin du modèle standard dans notre situation de signature $(1,1)$, car le domaine n'est pas pseudo-convexe ou pseudo-concave, donc ces disques ne semblent pas maximiser une fonctionnelle ; cependant, dans le cas d'un espace de twisteurs, leur interprétation en termes de la géométrie conforme de dimension 4 (lemme 4.7) donne un espoir de construction plus générale—cette construction est le problème essentiel à résoudre pour donner une condition de remplissage pour les métriques qui ne sont pas proches de la métrique ronde.

À partir de la section 5, on s'intéresse à une question légèrement différente : décrire les espaces de modules des objets satisfaisant la condition de coefficients de Fourier positifs, et en particulier, voir à quel point cette condition contraint la structure. Un contreexemple est fourni par le cas des sphères S^{2n-1} dans \mathbf{C}^n : le théorème 0.3 est valable, mais la condition est vide pour $n > 2$, puisqu'alors toutes les déformations CR se remplissent ; cela signifie que l'on peut toujours trouver un contactomorphisme ramenant une structure CR donnée sur une structure à coefficients de Fourier positifs. Un phénomène semblable explique le théorème 0.8.

Il faut donc étudier l'action des contactomorphismes sur les structures CR ; la section 5 propose une paramétrisation du groupe des contactomorphismes par des fonctions. Ici, il faut entrer un peu dans la technique : les espaces fonctionnels naturels en géométrie de contact sont les espaces de Folland-Stein de fonctions avec des dérivées uniquement dans les directions de contact ; le théorème 5.5 propose une paramétrisation des contactomor-

phismes à k dérivées horizontales par des fonctions à $k + 1$ dérivées horizontales. Cette paramétrisation permet, dans la section 6, de montrer l'existence d'une jauge de Coulomb par rapport à l'action des contactomorphismes, dans laquelle le maximum de coefficients négatifs sont tués ; de cette manière, la possibilité de remplissage de la structure CR se lit sur la jauge de Coulomb, comme en dimension 3 ([Bla94], voir aussi [BE90]).

Pour passer à la description explicite des espaces tangents des structures remplissables, il faut calculer l'image de l'action infinitésimale des contactomorphismes sur les structures CR ; cette action est donnée par un hessien complexe agissant sur les fonctions réelles. L'analyse, dans la section 7, est basée sur le fait que le groupe d'isométries SO_4 de S^3 agit de manière homogène sur son espace des twisteurs $\{|z^1|^2 + |z^2|^2 = |z^3|^2 + |z^4|^2\} \subset P^3$; par conséquent, la décomposition des objets suivant les représentations irréductibles de SO_4 permet de se ramener à un problème algébrique pour chaque représentation. On peut alors faire, dans la section 8, une théorie de déformation complète pour les structures CR, dans la section 9 pour les données conformes $[g, \mathcal{Q}]$: cela signifie qu'on dispose bien d'un procédé fabriquant à partir d'un élément de l'espace tangent indiqué dans le théorème 9.3 une donnée $[g, \mathcal{Q}]$ remplissable ; enfin, dans la section 10, on attaque le problème pour les métriques conformes $[g]$: une difficulté surprenante est qu'il est difficile de garantir que le procédé utilisé pour $[g, \mathcal{Q}]$ fournisse, à partir d'une métrique infinitésimale, une métrique conforme (avec $\mathcal{Q} = 0$) ; d'un autre côté, il n'est pas évident a priori que l'intersection $\mathcal{B}_+ \cap \mathcal{M}$ soit transverse ; pour contourner la difficulté, on est obligé de reprendre toute une théorie de déformation du couple constitué d'une structure CR intégrable avec une forme de contact holomorphe.

Enfin, dans la section 11, on traite le cas, moins difficile, de la dimension supérieure. Le problème essentiel est similaire : le remplissage d'une petite déformation de la structure CR, de signature $(2m - 1, 1)$. On montre que la linéarisation de l'action des contactomorphismes sur les structures CR atteint tous les coefficients strictement négatifs, de sorte qu'il est toujours possible de présenter une structure CR avec des coefficients positifs, et donc de la remplir ; une autre démonstration possible est probablement l'application du théorème de Kiremidjian [Kir79].

1 Construction twistorielle

Dans cette section, on rappelle la construction de l'espace des twisteurs d'une variété conforme de dimension 3, due à LeBrun [LeB84, LeB85].

1.1 Twisteurs d'une variété de dimension 3

Soit X^3 une variété. L'espace \mathcal{T} des twisteurs de X est le fibré des grassmanniennes en 2-plans orientés de TX . On notera $p : \mathcal{T} \rightarrow X$ la projection naturelle. La fibre en $x \in X$ de la projection p est donc la 2-sphère $Gr_2^+(T_x X)$, et on dispose d'une involution τ de \mathcal{T} , qui associe à un 2-plan orienté le même 2-plan muni de l'orientation opposée. Enfin, \mathcal{T} est muni d'une distribution de contact canonique $H \subset T\mathcal{T}$, définie au point $P \in Gr_2^+(T_x X)$ par

$$H_P = p_*^{-1}(P).$$

Supposons à présent X muni d'une métrique riemannienne g . Alors la distribution de contact H hérite d'une structure presque complexe J , définie de la manière suivante : la connexion de Levi-Civita de g permet de décomposer l'espace tangent en $P \in Gr_2^+(T_x X)$ en

$$T_P \mathcal{T} = \text{Ver}_P \oplus \text{Hor}_P,$$

où Ver_P est l'espace tangent à la fibre de p et Hor_P est l'espace horizontal induit par la connexion ; on peut identifier $\text{Ver}_P = \text{Hom}(P, T_x X/P)$, et $\text{Hor}_P = T_x X$ via la projection p , et la distribution de contact est alors $H_P = \text{Ver}_P \oplus P$; la métrique g induit une structure complexe j sur le 2-plan orienté P , et la structure complexe J sur H_P est définie par

$$\begin{aligned} J(u) &= -u \circ j, & u &\in \text{Hom}(P, T_x X/P), \\ J(v) &= jv, & v &\in P. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si on multiplie la métrique par une fonction, on peut vérifier que J n'est pas modifiée, de sorte que J ne dépend que de la structure conforme $[g]$. La structure complexe J est en réalité une structure CR intégrable sur \mathcal{T} , et les fibres de la projection twistorielle p sont holomorphes.

Il y a une variante de la construction précédente dans le cas où est de plus donnée sur X une forme quadratique sans trace, \mathcal{Q} ; géométriquement, la donnée (g, \mathcal{Q}) apparaît naturellement au bord d'une variété riemannienne comme la donnée de la première forme fondamentale et de la partie sans trace de la seconde forme fondamentale ; le facteur conforme f agit par

$$(g, \mathcal{Q}) \longrightarrow (f^2 g, f \mathcal{Q}), \quad (1.2)$$

et on notera $[g, \mathcal{Q}]$ la donnée d'un tel couple, à l'action près du facteur conforme. La donnée de \mathcal{Q} induit, pour un 2-plan orienté $P \subset T_x X$, un morphisme $\tilde{\mathcal{Q}} \in \text{Hom}(\text{Hor}_P, \text{Ver}_P)$, car

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\text{Hor}_P, \text{Ver}_P) &= \text{Hom}(T_x X, \text{Hom}(P, T_x X/P)) \\ &= \text{Hom}(T_x X \otimes P, T_x X/P), \end{aligned}$$

et on identifie $T_x X/P = \mathbf{R}$ via la métrique ; compte tenu de l'invariance conforme (1.2), cette identification ne dépend pas du facteur conforme, et l'élément de $\text{Hom}(\text{Hor}_P, \text{Ver}_P)$ est donc bien défini. Finalement, $\tilde{\mathcal{Q}}$ définit un nouvel espace horizontal

$$\text{Hor}_P^{\mathcal{Q}} = \{u + \tilde{\mathcal{Q}}u, u \in \text{Hor}_P\},$$

et la construction de J par les formules (1.1) fournit à nouveau une structure CR intégrable sur \mathcal{T} , ne dépendant que de la classe conforme $[g, \mathcal{Q}]$.

Dans tous les cas, l'involution τ est compatible avec la structure CR, elle est anti-holomorphe :

$$\tau^* T^{0,1} \mathcal{T} = T^{1,0} \mathcal{T}. \quad (1.3)$$

On peut remarquer que si on a une variété riemannienne autoduale M^4 à bord X^3 , alors l'espace des twisteurs de M —une variété complexe à bord— a précisément pour bord l'espace des twisteurs de X , muni des première et seconde formes fondamentales induites.

Un théorème de LeBrun indique que toutes les variétés CR feuilletées en fibres holomorphes proviennent de la construction précédente :

Théorème 1.1. [LeB85, théorème 7] *Soit \mathcal{T}^5 une variété CR intégrable munie d'une projection $p : \mathcal{T} \rightarrow X$ à fibres P^1 holomorphes ; alors \mathcal{T} est*

l'espace des twisteurs d'un couple $[g, \mathcal{Q}]$ sur X . De plus, $\mathcal{Q} = 0$ si et seulement si \mathcal{T} admet une structure de contact holomorphe, à laquelle soient tangents les P^1 .

Rappelons que sur une variété CR intégrable, le fibré $T' = T^{\mathbb{C}}/T^{0,1}$ est holomorphe, avec un opérateur $\bar{\partial}$ donné par la formule ($u \in T^{0,1}$, $v \in T^{\mathbb{C}}$)

$$\bar{\partial}_u v = [u, v], \quad (1.4)$$

la formule ayant un sens sur $T^{\mathbb{C}}/T^{0,1}$ grâce à $[T^{0,1}, T^{0,1}] \subset T^{0,1}$; une structure de contact holomorphe est un sous-fibré holomorphe, de codimension 1, non intégrable, de T' .

Dans le cas $\mathcal{Q} = 0$, la distribution de contact holomorphe est construite ainsi : en un 2-plan orienté $P \subset T_x X$, la projection $\pi_P \circ p_*$ (où π_P est la projection orthogonale $T_x X \rightarrow P$) peut se complexifier en

$$\pi_P \circ p_* : T_P^{\mathbb{C}} \mathcal{T} / T_P^{0,1} \mathcal{T} \longrightarrow P^{1,0},$$

et le noyau de cette projection est la structure de contact holomorphe.

1.2 Twisteurs de l'espace hyperbolique réel

L'espace des twisteurs de la sphère ronde S^4 est le projectif complexe P^3 ; pour décrire la fibration twistorielle p , il est utile d'identifier la sphère avec le projectif quaternionien : $S^4 = \mathbf{H}P^1$; la fibration twistorielle s'écrit alors en coordonnées homogènes

$$p([z^1 : z^2 : z^3 : z^4]) = [z^1 + jz^2 : z^3 + jz^4].$$

L'espace hyperbolique réel se réalise comme une demi-sphère :

$$\mathbf{R}H^4 = \{[q^1 : q^2] \in \mathbf{H}P^1, |q^1|^2 < |q^2|^2\}$$

et sa fibration twistorielle est la restriction de p au domaine

$$\mathcal{N} = \{[z^1 : z^2 : z^3 : z^4], |z^1|^2 + |z^2|^2 < |z^3|^2 + |z^4|^2\}.$$

Comme espace des twisteurs d'une variété autoduale, \mathcal{N} est muni :

- d’une structure réelle compatible aux autres structures :

$$\tau([z^1 : z^2 : z^3 : z^4]) = [-\overline{z^2} : \overline{z^1} : -\overline{z^4} : \overline{z^3}]; \quad (1.5)$$

- d’une famille de P^1 holomorphes, réels, à fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$: les fibres de p .

Rappelons que, par la construction twistorielle inverse, une variété complexe \mathcal{N} munie d’une telle structure est l’espace des twisteurs d’une métrique (conforme) autoduale, définie sur l’espace des P^1 réels.

Jusqu’ici, on a utilisé seulement la structure conforme de $\mathbf{R}H^4$, égale à celle de la boule B^4 ; mais l’espace hyperbolique réel est muni en outre d’une métrique d’Einstein, ce qui est équivalent à l’existence sur \mathcal{N} d’une structure de contact holomorphe η^c , transverse aux P^1 réels; dans notre cas,

$$\eta^c = z^1 dz^2 - z^2 dz^1 - (z^3 dz^4 - z^4 dz^3). \quad (1.6)$$

La sphère S^3 apparaît comme bord à l’infini de l’espace hyperbolique réel, et son espace des twisteurs \mathcal{T} est le bord de \mathcal{N} , donc se décrit comme l’hypersurface réelle de P^3 :

$$\mathcal{T} = \{[z^1 : z^2 : z^3 : z^4], |z^1|^2 + |z^2|^2 = |z^3|^2 + |z^4|^2\}. \quad (1.7)$$

En particulier, \mathcal{T} se projette sur $P^1 \times P^1$ par la projection

$$\pi([z^1 : z^2 : z^3 : z^4]) = ([z^1 : z^2], [z^3 : z^4])$$

et apparaît ainsi comme le S^1 -fibré $\mathcal{O}(-1, 1)$ sur $P^1 \times P^1$, si on choisit comme action de $u \in S^1$

$$u([z^1 : z^2 : z^3 : z^4]) = [uz^1 : uz^2 : z^3 : z^4];$$

cette action se prolonge en une action du disque Δ sur \mathcal{N} avec points fixes $\{[0 : 0 : z^3 : z^4]\}$, c’est-à-dire la fibre twistorielle au-dessus du point $[0 : 1] \in \mathbf{H}P^1$; en éclatant cette fibre, on obtient un fibré $\pi : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow P^1 \times P^1$ qui est exactement le fibré holomorphe en disques $\mathcal{O}(-1, 1)$ au-dessus de $P^1 \times P^1$.

Dans cette image, les structures dont est muni l’espace des twisteurs \mathcal{T} apparaissent naturellement :

- la structure de contact η est fourni par la connexion standard sur le fibré $\mathcal{O}(-1, 1)$, avec courbure

$$-d\eta = -\omega_1 + \omega_2, \quad (1.8)$$

où ω_1 et ω_2 sont les formes de Fubini-Study des deux P^1 ;

- la structure complexe J sur \mathcal{T} est le tiré en arrière de la structure complexe de $P^1 \times P^1$ dans la distribution de contact, elle est S^1 -invariante ;
- la structure réelle anti-commute à l'action de S^1 ,

$$\tau \circ e^{i\theta} = e^{-i\theta} \circ \tau; \quad (1.9)$$

- la forme de contact holomorphe est la restriction de (1.6) au bord ; plus concrètement, dans des coordonnées $[u : uz^2 : 1 : z^4]$, où z^2 et z^4 sont des coordonnées sur $P^1 \times P^1$, on obtient

$$\eta^c = u^2 dz^2 - dz^4; \quad (1.10)$$

on déduit que η^c est une forme à valeurs dans le fibré $\mathcal{O}(0, 2)$.

On remarquera que, par rapport à la distribution de contact holomorphe, les P^1 réels à l'intérieur de \mathcal{N} sont transverses, tandis que les P^1 réels au bord de \mathcal{N} sont tangents ; cela traduit le fait que la métrique hyperbolique explose au bord, avec un pôle d'ordre 2. En revanche, la structure conforme s'étend de manière lisse au bord. Toutes les métriques que nous construirons auront ce comportement.

2 Extension holomorphe suivant les disques

Dans cette section, nous mettons en œuvre une construction pour déformer la structure complexe de l'espace des twisteurs \mathcal{N} , en utilisant l'idée classique de prolongement holomorphe le long de disques.

2.1 Déformation de la structure complexe

Commençons par quelques rappels sur la théorie de déformation. Fixons une variété complexe D , une déformation de la structure presque complexe

de D peut être représentée par une $(0,1)$ -forme ϕ à valeurs dans $T^{1,0}$, de sorte que le nouveau $T^{0,1}$ soit égal à

$$\{X + \phi_X, X \in T^{0,1}D_0\}.$$

La déformation est intégrable si et seulement si

$$\bar{\partial}\phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0, \quad (2.1)$$

où le crochet de deux $(0,1)$ -formes à valeurs dans $T^{1,0}$ est une $(0,2)$ -forme à valeurs dans $T^{1,0}$ définie par

$$\frac{1}{2}[\phi, \phi]_{X,Y} = [\phi_X, \phi_Y] - \phi_{[X, \phi_Y]^{0,1}} - \phi_{[Y, \phi_X]^{0,1}}.$$

Supposons à présent que D soit l'espace total d'un fibré holomorphe en disques sur une variété complexe X , et que le fibré soit muni d'une métrique $h : D \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que $h(ux) = |u|^2 h(x)$ si $u \in \Delta$; alors on dispose d'une 1-forme de connexion, en notant $d^C = i(\bar{\partial} - \partial)$,

$$\eta = \frac{1}{2}d^C \ln h, \quad (2.2)$$

se restreignant sur chaque disque à la forme angulaire $d\theta$, de sorte que la courbure de h est la 2-forme sur X définie par

$$F = id\eta;$$

sur chaque fibré en cercles $h = cst$, le noyau de la forme η définit un espace horizontal H , si bien qu'en chaque point $x \in D$ on a la décomposition (V_x désignant l'espace tangent à la fibre de $D \rightarrow X$)

$$T_x D = V_x \oplus H_x.$$

Sur le bord $M = \partial D$, on a une description similaire des déformations CR : puisque deux structures de contact proches sont difféomorphes, on peut supposer que la structure de contact H est fixe, et les déformations de la structure CR sont paramétrées par les $(0,1)$ -formes horizontales ϕ à valeurs dans $T^{1,0}$, et, à nouveau, la déformation est intégrable si et seulement si

$$\bar{\partial}\phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0;$$

ici il faut noter que le fibré $T^{1,0}$ n'est pas holomorphe, voir (1.4), si bien que $\bar{\partial}\phi$ est en réalité à valeurs dans le fibré holomorphe $T^{\mathbf{C}}M/T^{0,1}M$; la présence de la forme de contact η permet de choisir un champ de Reeb R —l'action infinitésimale de S^1 —, et la projection de l'équation sur $T^{1,0}$ et $\mathbf{C}R$ donne les deux conditions

$$\bar{\partial}_H\phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0, \quad \phi \lrcorner F = 0, \quad (2.3)$$

où, par abus de notation, \lrcorner est la contraction suivie du produit extérieur :

$$\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0} \otimes \Omega^{1,1} \rightarrow \Omega^{0,1} \otimes \Omega^{0,1} \rightarrow \Omega^{0,2};$$

plus loin, on utilisera aussi l'opérateur plus général

$$\lrcorner : (\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}) \otimes \Omega^{i,j} \rightarrow \Omega^{i-1,j+1};$$

on peut remarquer que la seconde condition dans (2.3) dit que F reste de type (1,1) pour la nouvelle structure complexe.

Bland-Duchamp étudient les déformations ϕ de D qui ne modifient pas la structure complexe des disques et préservent H :

Théorème 2.1. [BD91, théorèmes 7.2 et 9.3] *Supposons que ϕ , défini sur le fibré en disques D , s'annule sur V et satisfait $\phi(H^{0,1}) \subset H^{1,0}$, alors ϕ est une déformation intégrable de D si et seulement si*

1. *ϕ est holomorphe le long de chaque disque du fibré ;*
2. *ϕ satisfait les équations (2.3) sur le bord ∂D .*

Remarquons que la première condition a un sens, puisque le fibré H_x sur chaque disque est égal à l'espace fixe $T_{\pi(x)}X$: elle signifie que dans une base constante de H_x , les coefficients de ϕ sont holomorphes le long du disque.

Le théorème dit en particulier qu'étant donné ϕ intégrable sur le bord ∂D , à coefficients de Fourier positifs ou nuls par rapport à l'action de S^1 , suffisamment petite, l'extension holomorphe de ϕ le long de chaque disque fournit une déformation intégrable de D . La démonstration est simple : d'une part, si ϕ est assez petite au bord, l'extension holomorphe à l'intérieur est petite et correspond donc bien à une déformation de la structure complexe ; d'autre part, la condition que ϕ soit holomorphe le long des disques et la condition (2.3) impliquent qu'en réalité, la condition (2.3) est vérifiée sur toutes les hypersurfaces $h = cst$, ce qui donne l'intégrabilité (2.1).

2.2 Application aux déformations autoduales de la boule

Appliquons le théorème 2.1 à l'espace des twisteurs \mathcal{N} de l'espace hyperbolique réel défini en 1.2 ; l'éclatement d'un P^1 nous a donné le fibré en disques $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{O}(-1, 1)$ au-dessus de $P^1 \times P^1$. Rappelons que \mathcal{N} et $\tilde{\mathcal{N}}$ sont munis de la structure réelle τ définie en (1.5).

Lemme 2.2. *Si on a une petite déformation $\phi \in \text{Hom}(H^{0,1}, H^{1,0})$ de la structure CR intégrable de $\mathcal{T} = \partial\mathcal{N}$, à coefficients de Fourier positifs ou nuls par rapport à l'action de S^1 sur \mathcal{T} , alors ϕ s'étend en une déformation de la structure complexe de \mathcal{N} .*

De plus, si ϕ est compatible à la structure réelle τ , alors le prolongement reste compatible à τ .

Démonstration. En appliquant le théorème 2.1, on peut prolonger ϕ en une déformation intégrable sur $\tilde{\mathcal{N}}$. Supposons dans un premier temps que les coefficients de Fourier de ϕ soient strictement positifs, alors les coefficients de l'extension s'annulent sur la section nulle, qui demeure donc $P^1 \times P^1$ avec fibré normal $\mathcal{O}(-1, 1)$; on peut alors contracter le premier P^1 pour récupérer une déformation de \mathcal{N} . Dans le cas général, les coefficients de ϕ ne s'annulent pas sur la section nulle, mais comme ϕ est à valeurs dans $H^{1,0}$, la section nulle reste une sous-variété holomorphe pour la nouvelle structure complexe ; comme les déformations holomorphes de $P^1 \times P^1$ sont triviales, elle reste biholomorphe à $P^1 \times P^1$; le fibré normal lui aussi ne peut être déformé, donc reste égal à $\mathcal{O}(-1, 1)$, et la même conclusion s'applique.

Pour la seconde partie de l'énoncé, il est facile de voir que si au bord ϕ est compatible à la structure réelle τ , c'est-à-dire $\tau^*\bar{\phi} = -\phi$, alors cette propriété est préservée dans le prolongement holomorphe. \square

Corollaire 2.3. *Si on a une petite déformation $[g, \mathcal{Q}]$ de la métrique standard de S^3 , dont l'espace des twisteurs satisfait les hypothèses du lemme 2.2, alors $[g, \mathcal{Q}]$ est le bord d'une métrique autoduale sur la boule B^4 .*

Démonstration. La construction réalisée dans la section 1.1 permet d'associer à une déformation de $[g, \mathcal{Q}]$ une déformation de \mathcal{T} en gardant fixe la structure de contact et la structure réelle ; le lemme 2.2 permet d'étendre cette déformation en une déformation de \mathcal{N} . Pour avoir une structure d'espace des

twisteurs, il reste à fabriquer la famille des P^1 réels : remarquons que cette famille est donnée sur $\mathcal{T} = \partial N$, et il faut la prolonger à l'intérieur ; comme les P^1 initiaux ont pour fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$, la théorie de déformation de Kodaira permet de suivre la déformation. On a ainsi construit l'espace des twisteurs du prolongement souhaité de $[g, \mathcal{Q}]$ sur B^4 . \square

Remarque 2.4. La construction de l'espace des twisteurs de $[g, \mathcal{Q}]$ faite dans la section 1.1 n'a en réalité aucune chance de fournir directement une déformation ϕ de la structure CR de \mathcal{T} à coefficients de Fourier positifs ou nuls ; l'idée pour appliquer le corollaire consiste à trouver éventuellement un contactomorphisme de \mathcal{T} , préservant τ , ramenant ϕ à un tenseur à coefficients de Fourier positifs ou nuls.

3 Extension de la forme de contact holomorphe

Si l'on part sur S^3 d'une métrique dont l'espace des twisteurs \mathcal{T} satisfait les hypothèses du lemme 2.2, le corollaire 2.3 fournit un remplissage autodual, avec espace des twisteurs \mathcal{N} ; pour obtenir un remplissage autodual Einstein, il faut de plus prolonger à \mathcal{N} la structure de contact holomorphe définie sur $\mathcal{T} = \partial \mathcal{N}$. Ce problème peut être reposé sous la forme : étant donnée sur $\partial \mathcal{N}$ une section de la grassmannienne des 2-plans complexes de \mathcal{N} , peut-on étendre cette section en une section holomorphe sur \mathcal{N} ? nous proposons ci-dessous une solution de ce problème de Plateau complexe, pour les structures complexes proches du \mathcal{N} standard.

3.1 Problème infinitésimal

Rappelons que l'espace des twisteurs \mathcal{T} de S^3 est le fibré en cercles $\pi : \mathcal{O}(-1, 1) \rightarrow P^1 \times P^1$; on peut identifier, en notant P_1^1 et P_2^1 les deux facteurs du produit $P^1 \times P^1$,

$$T'\mathcal{T} := T^{\mathbb{C}}\mathcal{T}/T^{0,1}\mathcal{T} = \mathbb{C}R \oplus T^{1,0}\mathcal{T} = \mathbb{C}R \oplus T^{1,0}P_1^1 \oplus T^{1,0}P_2^1. \quad (3.1)$$

Précisons la structure holomorphe du fibré dual

$$\Omega'\mathcal{T} = (T'\mathcal{T})^* = \mathbb{C}\eta \oplus \Omega^{1,0}P_1^1 \oplus \Omega^{1,0}P_2^1. \quad (3.2)$$

Les deux sous-fibrés $\Omega^{1,0}P_i^1$, tirés en arrière depuis la base $P^1 \times P^1$, sont holomorphes, mais pas η : compte tenu de (1.8), on obtient l'opérateur $\bar{\partial}$ dans la décomposition (3.2) :

$$\bar{\partial}^{\Omega'\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \bar{\partial} & & \\ \omega_1 & \bar{\partial} & \\ -\omega_2 & & \bar{\partial} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

La forme de contact holomorphe η^c définie en (1.10) est une section de $\Omega'\mathcal{T} \otimes L$, où $L = \mathcal{O}(0, 2)$. L'action de S^1 sur \mathcal{T} se relève naturellement au fibré $\Omega'\mathcal{T} \otimes L$, car celui-ci provient de la base ; son opérateur $\bar{\partial}$ est également S^1 -invariant. Cela permet d'écrire le lemme suivant.

Lemme 3.1. *L'opérateur $\bar{\partial}$ du fibré $\Omega'\mathcal{T} \otimes L$ n'a pas de noyau sur les sections à coefficients de Fourier strictement négatifs ; sur les sections S^1 -invariantes, son noyau est réduit aux sections constantes de $\Omega^{1,0}P_2^1 \otimes \mathcal{O}(0, 2) = \mathbf{C}$.*

Démonstration. Le fibré $\mathcal{O}(-1, 1)$ sur \mathcal{T} a une section tautologique t , holomorphe, de poids 1 pour l'action de S^1 ; étant donné un fibré holomorphe S^1 -invariant E , la donnée d'une section holomorphe s de E avec poids k par rapport à l'action de S^1 est équivalente à la donnée de la section holomorphe S^1 -invariante $s \otimes t^{-k}$ du fibré $E \otimes \mathcal{O}(-1, 1)^{\otimes(-k)} = E \otimes \mathcal{O}(k, -k)$. Appliquons cette observation au fibré $E = \Omega'\mathcal{T} \otimes L$ muni de la structure (3.2) : une section holomorphe de poids k fournit une section holomorphe invariante de $E \otimes \mathcal{O}(k, -k) = \Omega'\mathcal{T} \otimes \mathcal{O}(k, -k + 2)$; sous la décomposition (3.2), une telle section se décompose en $s = s_0 + s_1 + s_2$ avec s_0, s_1, s_2 sections respectives de $\mathcal{O}(k, -k + 2)$, $\mathcal{O}(k - 2, -k + 2)$ et $\mathcal{O}(k, -k)$, et la section est holomorphe si

$$\bar{\partial}s_0 = 0, \quad \bar{\partial}s_1 + \omega_1 s_0 = 0, \quad \bar{\partial}s_2 - \omega_2 s_0 = 0;$$

comme les sections sont S^1 -invariantes, elles descendent sur $P^1 \times P^1$ et les équations ont lieu sur $P^1 \times P^1$.

Si $k < 0$, alors $H^0(P^1 \times P^1, \mathcal{O}(k, -k + 2)) = 0$ donc $s_0 = 0$, et les équations deviennent simplement

$$\bar{\partial}s_1 = 0, \quad \bar{\partial}s_2 = 0,$$

mais, à nouveau, $H^0(P^1 \times P^1, \mathcal{O}(k - 2, -k + 2)) = H^0(P^1 \times P^1, \mathcal{O}(k, -k)) = 0$ si $k < 0$ donc $s = 0$.

Si $k = 0$, alors $s_0 \in H^0(P^1 \times P^1, \mathcal{O}(0, 2)) = H^0(P_2^1, \mathcal{O}(2))$, mais la projection de l'équation $\bar{\partial}s_1 + \omega_1 s_0 = 0$ sur $H^1(P^1 \times P^1, \mathcal{O}(-2, 2)) = H^0(P_2^1, \mathcal{O}(2))$ implique en réalité $s_0 = 0$; on déduit alors de la même manière $s_1 = 0$ et $s_2 = cst.$ \square

Ce lemme implique en particulier que, par prolongement holomorphe le long des disques, toutes les sections holomorphes du fibré $\Omega'\mathcal{T} \otimes L$ au bord se prolongent sur le fibré en disques; en outre, sur la section nulle, seule la composante sur $\Omega^{1,0}P_2^1$ peut être non triviale, ce qui signifie que la section descend en réalité sur l'espace des twisteurs \mathcal{N} (obtenu en contractant le P_1^1 de la section nulle). Cette observation est à la base de la démonstration de l'existence d'un prolongement à l'intérieur de la forme de contact holomorphe.

Corollaire 3.2. *Pour une section s de $\Omega' \otimes L$ sur \mathcal{T} , à coefficients de Fourier strictement négatifs, on a une estimation*

$$\|\bar{\partial}s\|_{L^2} \geq c(\|\nabla_H s\|_{L^2} + \|s\|_{L^2});$$

la même estimation reste valable pour une section à coefficients de Fourier négatifs ou nuls, s'annulant sur $T^{1,0}P_2^1$.

Démonstration. La variété CR \mathcal{T} est de signature $(1,1)$, l'opérateur $\bar{\partial}$ est donc hypoelliptique sur les 0-formes, et l'absence de noyau, conséquence du lemme (3.1), implique les estimations du corollaire.

Bien qu'il s'agisse d'une théorie bien connue, il peut être utile au lecteur de voir de manière élémentaire comment ces estimations sont une conséquence de la signature $(1,1)$ du fibré $\mathcal{O}(-1, 1)$. Expliquons cela brièvement dans le cas d'une fonction s d'un fibré E provenant de la base $P^1 \times P^1$. On peut décomposer s suivant en séries de Fourier sur chaque cercle :

$$s = \sum_k s_k;$$

comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 3.1, si t est la section tautologique du fibré $\mathcal{O}(-1, 1)$, alors $s_k t^{-k}$ est une section S^1 -invariante de $\mathcal{O}(k, -k)$; rappelons la formule de Weitzenböck, pour une section σ d'un fibré E sur la variété kählérienne X :

$$\int_X |\bar{\partial}\sigma|^2 = \frac{1}{2} \int_X |\nabla\sigma|^2 - \langle i\Lambda F^E \sigma, \sigma \rangle, \quad (3.4)$$

où Λ est la contraction par la forme de Kähler ; maintenant, remarquons que

$$iF^{\mathcal{O}(k,-k)} = k(-\omega_1 + \omega_2);$$

si $k \geq 0$, nous appliquons la formule de Weitzenböck sur chaque $\{x\} \times P_2^1$:

$$\int_X |\bar{\partial}(s_k t^{-k})|^2 \geq \int_X \left| \bar{\partial}_{P_2^1}(s_k t^{-k}) \right|^2 \geq \int_X (k - \sup |F^E|) |s_k|^2,$$

tandis que pour $k \leq 0$, le même résultat est obtenu en utilisant plutôt le signe de la courbure de $\mathcal{O}(k, -k)$ sur P_1^1 , et par conséquent,

$$\|\bar{\partial}s\|_{L^2}^2 + \|s\|_{L^2}^2 \geq c \sum (1 + |k|) \|s_k\|^2;$$

en réutilisant (3.4) pour obtenir un contrôle sur $\nabla(s_k t^{-k})$, on obtient

$$\|\bar{\partial}s\|_{L^2}^2 + \|s\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla_H s\|_{L^2}^2;$$

ce contrôle implique aussi le contrôle d'une demi-dérivée dans la direction transverse à la distribution de contact, c'est-à-dire l'estimation, démontrée directement, sur $\sum k \|s_k\|^2$.

Par un argument standard d'analyse fonctionnelle, cette estimation implique que le noyau de $\bar{\partial}$ est de dimension finie, et, dans le cas où il est nul, l'estimation du corollaire. \square

3.2 Problème non linéaire

La déformation de la structure complexe, $\phi : T^{0,1} \rightarrow T^{1,0}$, induit au dual $\phi^t : \Omega^{1,0} \rightarrow \Omega^{0,1}$, que l'on peut aussi écrire comme la contraction $\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0} \otimes \Omega^{1,0} \rightarrow \Omega^{0,1}$,

$$\phi^t(\xi) = \phi \lrcorner \xi;$$

les (1,0)-formes pour la nouvelle structure complexe sont paramétrées par les

$$\xi - \phi \lrcorner \xi,$$

pour $\xi \in \Omega^{1,0}$; notons que cette formule a également un sens sur $\Omega' = \mathbf{C}\eta \oplus \Omega^{1,0}$. Une structure de contact complexe pour la nouvelle structure complexe peut donc être représentée par la 1-forme à valeurs dans L ,

$$\varpi^c = (\eta^c + \xi) - \phi \lrcorner (\eta^c + \xi),$$

où ξ est une section de $\Omega'\mathcal{T} \otimes L$, que l'on peut soumettre à la normalisation

$$\xi|_{T^{1,0}P_2^1} = 0;$$

le noyau de la forme ϖ^c est holomorphe si et seulement si, pour tout $X \in T^{0,1}$,

$$\iota_{X+\phi_X} d\varpi^c = \alpha_X \varpi^c, \quad \alpha \in \Omega^{0,1}; \quad (3.5)$$

on remarquera que l'opérateur d fait a priori intervenir une connexion sur le fibré L , mais un choix différent de connexion ne modifie le membre de gauche que par un terme proportionnel à ϖ^c , donc sans influence sur l'équation.

Digression : décomposition de la différentielle extérieure

Avant de poursuivre l'étude de l'équation (3.5), nous avons besoin de préciser quelques décompositions de la différentielle extérieure d sur la variété CR \mathcal{T} .

Pour une fonction f , on peut décomposer la différentielle en

$$df = \bar{\partial}f + \partial'f, \quad \bar{\partial}f \in \Omega^{0,1}, \quad \partial'f \in \Omega'.$$

Passons maintenant aux 1-formes : puisque $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subset T^{1,0}$, on a

$$d\Omega^{0,1} \subset \Omega^{0,2} + \Omega^{1,1} + \mathbf{C}\eta \otimes \Omega^{0,1};$$

pour une $(0,1)$ -forme $\alpha \in \Omega^{0,1}$, on peut donc décomposer

$$d\alpha = \bar{\partial}\alpha + \partial'\alpha, \quad \begin{cases} \bar{\partial}\alpha \in \Omega^{0,2}, \\ \partial'\alpha \in \Omega^{1,1} + \mathbf{C}\eta \otimes \Omega^{0,1} = \Omega' \otimes \Omega^{0,1}. \end{cases}$$

De manière similaire, pour une $(1,0)$ -forme $\alpha \in \Omega^{1,0}$, on a la décomposition

$$d\alpha = \bar{\partial}\alpha + \partial'\alpha, \quad \begin{cases} \bar{\partial}\alpha \in \Omega^{1,1}, \\ \partial'\alpha \in \Omega^{2,0} + \mathbf{C}\eta \otimes \Omega^{1,0} = \Lambda^2\Omega'. \end{cases}$$

Enfin, pour une fonction f , on a

$$d(f\eta) = (\bar{\partial}f \wedge \eta + f d\eta) + \partial'f \wedge \eta \in \Omega^{0,1} \otimes \Omega' + \Lambda^2\Omega'$$

et on peut définir $\bar{\partial}(f\eta)$ et $\partial(f\eta)$ comme les deux morceaux de cette différentielle.

En particulier, nous avons donc la différentielle sur Ω' qui se décompose en $d = \bar{\partial} + \partial'$, avec

$$\bar{\partial}\Omega' \subset \Omega^{0,1} \otimes \Omega', \quad \partial'\Omega' \subset \Lambda^2\Omega'.$$

Ces observations mènent facilement au lemme plus général suivant.

Lemme 3.3. *Notons $\tilde{\Omega}^{i,j} = \Lambda^i\Omega' \otimes \Omega^{0,j} \subset \Omega^{i+j}$, alors la différentielle extérieure se décompose en $d = \bar{\partial} + \partial'$, avec*

$$\bar{\partial}\tilde{\Omega}^{i,j} \subset \tilde{\Omega}^{i+1,j}, \quad \partial'\tilde{\Omega}^{i,j} \subset \tilde{\Omega}^{i,j+1};$$

en particulier, on a $\bar{\partial}\partial' + \partial'\bar{\partial} = 0$. □

Forme de contact holomorphe

Revenons à l'équation (3.5) : les deux membres sont dans l'espace Ω' pour la nouvelle structure complexe induite par ϕ , l'équation est donc équivalente à sa projection sur Ω' pour la structure initiale, ce qui nous donne

$$\iota_X \bar{\partial}\xi - \iota_X \partial'\phi \lrcorner (\eta^c + \xi) + \iota_{\phi_X} (d\eta^c + \partial'\xi) = \alpha_X (\eta^c + \xi). \quad (3.6)$$

Notons l'identité, pour toute forme $\xi \in \Omega'$,

$$\partial'(\phi \lrcorner \xi) - \phi \lrcorner \partial'\xi = (\partial'\phi) \lrcorner \xi - \phi \lrcorner \nabla^{1,0}\xi; \quad (3.7)$$

cette identité ne fait intervenir qu'en apparence une dérivée covariante $\nabla^{1,0}$ sur $T^{1,0}$, car, en réalité, le membre de droite ne dépend pas du choix précis effectué. Nous obtenons finalement l'équation

$$\bar{\partial}\xi - (\partial'\phi) \lrcorner (\eta^c + \xi) + \phi \lrcorner \nabla^{1,0}(\eta^c + \xi) = \alpha \otimes (\eta^c + \xi). \quad (3.8)$$

En évaluant l'équation sur un vecteur dans $T^{1,0}P_2^1$, on obtient $\alpha = \alpha(\xi)$, avec $\alpha(\xi)$ ne dépendant de ξ qu'à l'ordre 0 ; on peut alors récrire l'équation comme

$$\bar{\partial}\xi = (\partial'\phi) \lrcorner (\eta^c + \xi) - \phi \lrcorner \nabla^{1,0}(\eta^c + \xi) + \alpha(\xi) \otimes (\eta^c + \xi).$$

Supposons ϕ à coefficients de Fourier positifs ou nuls, et projetons cette équation sur les coefficients de Fourier strictement négatifs : comme η^c a un coefficient de poids 0 sur le $\Omega^{1,0}P_2^1$ et un coefficient de poids 2 sur le $\Omega^{1,0}P_1^1$, on obtient, en notant $\xi_{<0}$ la partie de ξ à coefficients négatifs ou nuls,

$$\bar{\partial}\xi_{<0} = \pi_{<0} \left((\partial'\phi) \lrcorner \xi - \phi \lrcorner \nabla^{1,0}\xi + \alpha(\xi) \otimes (\eta^c + \xi) \right);$$

compte tenu de la forme des équations, dont les termes non linéaires sont seulement des multiplications, on obtient

$$\|\bar{\partial}\xi_{<0}\|_{L^2} \leq c(\|\xi_{<0}\|_{L^2} + \|\nabla_H \xi_{<0}\|_{L^2})(\|\xi\|_{L^\infty} + \|\phi\|_{C^1}). \quad (3.9)$$

De cette estimation, on déduit le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Supposons que l'on ait une perturbation \mathcal{T}_ϕ de la structure complexe de \mathcal{T} par un ϕ suffisamment petit, à coefficients de Fourier positifs ou nuls (de sorte que la perturbation s'étende à une perturbation \mathcal{N}_ϕ de \mathcal{N}). Supposons que \mathcal{T}_ϕ admette une structure de contact holomorphe, proche de la structure standard η^c . Alors celle-ci s'étend en une structure de contact holomorphe sur \mathcal{N}_ϕ .*

Démonstration. D'après le corollaire (3.2), on a une estimation

$$\|\bar{\partial}\xi_{<0}\|_{L^2} \geq c(\|\xi_{<0}\|_{L^2} + \|\nabla_H \xi_{<0}\|_{L^2});$$

compte tenu de l'estimation (3.9), si ϕ et ξ sont assez petits, on déduit $\xi_{<0} = 0$, donc ξ est à coefficients de Fourier positifs ; on peut alors prolonger ξ de manière holomorphe le long de chaque disque : le prolongement obtenu vérifie encore l'équation (3.8), ce qui signifie qu'on a finalement obtenu dans $\tilde{\mathcal{N}}_\phi$ une 1-forme ϖ à valeurs dans L , solution de l'équation

$$\bar{\partial}\varpi = \alpha \otimes \varpi, \quad \alpha \in \Omega_\phi^{0,1},$$

et, quitte à intégrer α dans l'opérateur $\bar{\partial}$ du fibré L , une solution de

$$\bar{\partial}\varpi = 0.$$

Rappelons (voir le lemme 2.2) que la base du fibré en disques est $P^1 \times P^1$ avec fibré normal $\mathcal{O}(-1, 1)$. La forme ϖ définit au-dessus de $P^1 \times P^1$ une section

holomorphe de $\Omega_{\mathcal{N}_\phi}^1 \otimes L$, avec L ne pouvant être égal qu'à $\mathcal{O}(0, 2)$, mais, comme dans la démonstration du lemme 3.1, ϖ doit s'annuler sur $T^{1,0}P_1^1$, et descend à la contraction \mathcal{N}_ϕ de P_1^1 . On obtient ainsi une distribution holomorphe sur \mathcal{N}_ϕ , qui est bien de contact car c'est une petite déformation de la structure de contact de \mathcal{N} . \square

Corollaire 3.5. *Si on a une petite déformation g de la métrique standard de S^3 , dont l'espace des twisteurs satisfait les hypothèses du lemme 2.2, alors g est le bord à l'infini d'une métrique autoduale Einstein (complète) sur B^4 .*

Démonstration. Le corollaire (2.3) nous dit que g est le bord d'une métrique autoduale sur B^4 , et le théorème précédent indique que son espace des twisteurs \mathcal{N} admet une forme de contact holomorphe; les P^1 réels sont tangents à la distribution de contact holomorphe au bord, transverses à l'intérieur, ce qui fournit la métrique d'Einstein voulue dans la classe conforme. \square

4 Construction de disques extrémaux

Dans les sections 2 et 3, on a vu une procédure pour fabriquer des métriques autoduales, ou autoduales Einstein, à partir d'une donnée conforme $[g, \mathcal{Q}]$ sur le bord S^3 : la méthode consiste à étendre les structures le long des disques holomorphes, pourvu que la structure complexe de l'espace des twisteurs au bord puisse se présenter avec des coefficients de Fourier positifs. Dans cette section, on montre la réciproque, à savoir que si l'extension existe, alors de tels disques holomorphes doivent toujours exister.

4.1 Existence d'une fibration en disques

Dans le cas d'un domaine pseudo-convexe, on dispose de méthodes pour produire des disques extrémaux [Lem81]. Dans le cas général où la forme de Levi n'a pas de signe fixé, mais demeure non dégénérée, nous construisons, par déformation, des disques extrémaux au sens de Lempert [Lem92, lemme 7.1, théorème 10.1].

Théorème 4.1. *Soit D un fibré en disques holomorphes au-dessus de la variété complexe X , tel que la forme de Levi de ∂D soit non dégénérée. Soit D_ϕ une petite perturbation de la structure complexe de D , telle que $X \subset D_\phi$ demeure une sous-variété complexe. Alors, pour tout point $p \in \partial D_\phi$, il existe un unique plongement $f : \overline{\Delta} \rightarrow \overline{D_\phi}$, et un unique sous-fibré E de $f^*T^{1,0}\overline{D_\phi}$, tels que :*

- (a) f et E sont holomorphes sur Δ ;
 - (b) $f(1) = p$, $f(S^1) \subset \partial D$, $f(0) \in X$;
 - (c) $E|_{S^1} = T^{1,0}\partial D_\phi$, et E_0 est tangent à X ;
- De plus, les $f = f^p$ satisfont
- (d) $T^{1,0}\Delta$ et E sont transverses.
 - (e) $f^{up}(\zeta) = f^p(u\zeta)$ pour tout $u \in S^1$;
 - (f) $F : \partial D \times \overline{\Delta} \rightarrow \overline{D_\phi}$ définie par $F(p, \zeta) = f^p(\zeta)$ est lisse, et $F(\cdot, \zeta) : \partial D \rightarrow \overline{D_\phi}$ est une immersion pour $\zeta \neq 0$.

Nous donnerons la démonstration du théorème dans la section 4.2. Pour le moment, nous en tirons quelques conséquences. Remarquons que la propriété (e) dans le théorème indique qu'on a en réalité construit une action de S^1 (et même de $\overline{\Delta}$) sur D_ϕ . Le corollaire suivant indique que la construction faite dans le lemme 2.2 capture bien toutes les déformations de D .

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses du théorème 4.1, l'action de S^1 définie par les f^p sur ∂D_ϕ est de contact ; plus généralement, la distribution $\text{Re}(E + \overline{E}) \subset TD_\phi$ est bien définie, et invariante sous $\overline{\Delta}$, ce qui signifie que D_ϕ se présente par rapport à D par un tenseur ϕ satisfaisant les hypothèses du lemme 2.2.*

Démonstration. Ce corollaire est essentiellement [Lem92, Lemme 7.1] et nous ne refaisons pas la démonstration : le point crucial est de montrer que si $Y \in T_p\partial D_\phi$ est un vecteur dans la distribution de contact, alors pour tout $\zeta \in \overline{\Delta}$, on a

$$F(\cdot, \zeta)_*Y \in E + \overline{E},$$

ce qui est une conséquence sans difficulté des conditions au bord et du fait que E est holomorphe le long des disques. \square

Nous déduisons maintenant de ce résultat une caractérisation des $[g, \mathcal{Q}]$ qui admettent un remplissage autodual.

Théorème 4.3. *Soit $[g, \mathcal{Q}]$ la donnée d'une première et d'une seconde formes fondamentales sur S^3 , à changement conforme près. Supposons que $[g, \mathcal{Q}]$ soit suffisamment proche de la métrique standard, alors $[g, \mathcal{Q}]$ est le bord d'une métrique autoduale sur la boule B^4 si et seulement si l'espace des twisteurs \mathcal{T} de $[g, \mathcal{Q}]$ admet une action de contact de S^1 , anti-commutant à la structure réelle de \mathcal{T} , par rapport à laquelle la structure CR de \mathcal{T} soit à coefficients de Fourier positifs ou nuls.*

Nous pouvons aussi donner un résultat sur le remplissage d'une classe conforme $[g]$ par une métrique d'Einstein autoduale.

Théorème 4.4. *Soit $[g]$ une métrique conforme sur S^3 , suffisamment proche de la métrique standard, alors $[g]$ est l'infini conforme d'une métrique d'Einstein autoduale sur la boule B^4 si et seulement si l'espace des twisteurs \mathcal{T} de $[g]$ admet une action de contact de S^1 , anti-commutant à la structure réelle de \mathcal{T} , par rapport à laquelle la structure CR de \mathcal{T} soit à coefficients de Fourier positifs ou nuls.*

Démonstration des théorèmes 4.3 et 4.4. Si l'on suppose que $[g, \mathcal{Q}]$ admet un remplissage autodual, alors l'espace des twisteurs \mathcal{T} admet un remplissage par l'espace des twisteurs \mathcal{N} de la métrique autoduale. Au-dessus du point $0 \in B^4$, nous avons une fibre twistorielle \mathcal{N}_0 qui est un P^1 ; en éclatant cette fibre, on obtient une variété $\tilde{\mathcal{N}}$ avec au-dessus de \mathcal{N}_0 un $P^1 \times P^1 \subset \tilde{\mathcal{N}}$, et on garde $\mathcal{T} = \partial\tilde{\mathcal{N}}$; on peut appliquer le théorème 4.1 et le corollaire 4.2 avec $X = P^1 \times P^1$ pour déduire que \mathcal{T} admet effectivement l'action de S^1 demandée. D'autre part, l'assertion d'unicité dans le théorème 4.1 contraint l'action de S^1 qui s'en déduit à satisfaire la condition de compatibilité (1.9) avec la structure réelle.

Réciproquement, étant donné $[g, \mathcal{Q}]$ satisfaisant les hypothèses du théorème, l'existence du remplissage autoduale résulte du corollaire 2.3; si de plus $\mathcal{Q} = 0$, alors le prolongement autodual admet bien dans sa classe conforme un représentant d'Einstein par le corollaire 3.5. \square

4.2 Démonstration du théorème 4.1

Il est clair que D , avec sa structure de fibré en disques $p : D \rightarrow X$, satisfait les conclusions du théorème. On va construire les structures pour D_ϕ par un argument de déformation.

Puisque la forme de Levi du bord est non dégénérée, on a une 1-forme de connexion η sur ∂D , se restreignant à la forme angulaire $d\theta$ sur chaque disque, telle que

$$(\ker \eta) \otimes \mathbf{C} = T^{0,1}\partial D + T^{1,0}\partial D$$

soit une distribution de contact sur ∂D ; comme deux structures de contact proches sont difféomorphes, on peut supposer que la même chose demeure valable pour D_ϕ , ce qui se traduit sur ϕ par la condition

$$\phi(T^{0,1}\partial D) \subset T^{1,0}\partial D.$$

Le résultat étant local au voisinage d'un disque donné au-dessus d'un point $x \in X$, on va choisir des coordonnées locales $(z^i)_{i \geq 1}$ sur X près de x . Nous trivialisons le fibré $\Omega^{1,0}D$ près du disque $p^{-1}(x)$ par la base

$$e^0 = 2i\eta^{1,0}, \quad e^i = p^*dz^i;$$

il faut noter que sur chaque disque, e^0 s'identifie simplement à $d\zeta/\zeta$; en particulier, nous avons choisi e^0 singulier sur la section nulle; nous avons la base duale constituée du vecteur d'homothétie dans les fibres, $\partial_0 = \zeta\partial/\partial\zeta$, et des relevés horizontaux ∂_i des vecteurs $\partial/\partial z^i$ de la base.

Étant donnée une perturbation ϕ de la structure complexe de D , nous trivialisons le fibré $\Omega^{1,0}D_\phi$ par les $e^i - \phi^t e^i$, et nous cherchons (f, ϖ) avec $f : \overline{\Delta} \rightarrow \overline{D}$ et

$$\varpi = \sum_{i \geq 0} \varpi_i (e^i - \phi^t e^i),$$

où les ϖ_i sont des fonctions sur $\overline{\Delta}$ et $E = \ker \varpi$; bien entendu, ϖ n'est défini qu'à multiplication près par une fonction, et nous choisissons la normalisation

$$\varpi_0 = \zeta;$$

compte tenu de la singularité de e^0 sur la section nulle, ce choix définit bien une forme lisse y compris sur la section nulle ; nous notons également

$$\pi^\varpi \left(\sum_{i \geq 0} \vartheta_i e^i \right) = \sum_{i > 0} (\vartheta_i - \vartheta_0 \varpi_i) e^i$$

la projection sur $\Omega^{1,0} D / \mathbf{C} \varpi \approx p^* \Omega^{1,0} X$.

Le couple (f, ϖ) doit satisfaire aux équations suivantes : d'une part, la différentielle $df : T\overline{\Delta} \rightarrow T\overline{D}_\phi$ se décompose en $\overline{\partial}_\phi f + \partial_\phi f : T^{0,1}\overline{\Delta} \rightarrow T^{1,0}\overline{D}_\phi + T^{0,1}\overline{D}_\phi$, et f est holomorphe si

$$\overline{\partial}_\phi f = 0;$$

comme on peut trivialisier $T^{0,1}\overline{\Delta}$ par le vecteur $\partial/\partial\overline{\zeta}$, on peut considérer $\overline{\partial}_\phi f$ comme une section de $f^* T^{1,0}\overline{D}_\phi \approx f^* T^{1,0}\overline{D}$ via ϕ ; d'autre part, E doit être holomorphe le long de $\overline{\Delta}$, ce qui se traduit par $\overline{\partial}_\phi \varpi = \alpha \otimes \varpi$; en identifiant à nouveau $\Omega^{1,0}\overline{D}_\phi$ et $\Omega^{1,0}\overline{D}$ via ϕ , on obtient finalement l'équation

$$\pi^\varpi \overline{\partial}_\phi \varpi = 0,$$

où, à nouveau en trivialisant $T^{0,1}\overline{\Delta}$ par $\partial/\partial\overline{\zeta}$, on peut considérer $\pi^\varpi \overline{\partial}_\phi \varpi$ comme une section de $f^* \Omega^{1,0} X$.

Les conditions au bord se traduisent par

$$\begin{aligned} f(1) &= p, \\ f(S^1) &\subset \partial D, \\ f(0) &\in X, \end{aligned} \tag{4.1}$$

et, pour $i > 0$,

$$\begin{aligned} \varpi_i|_{S^1} &= 0, \\ \varpi_i(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pour bien poser le problème d'inversion locale, il nous reste à poser

$$\begin{aligned} \text{Map}(\overline{\Delta}, \overline{D}) &= \{f : \overline{\Delta} \rightarrow \overline{D}, \text{ de classe } C^{1+\alpha}, \text{ satisfaisant (4.1)}\}, \\ \mathcal{E}(\overline{\Delta}, \overline{D}) &= \{\varpi = \zeta e^0 + \sum_{i > 0} \varpi_i e^i, \varpi_i \text{ de classe } C^{1+\alpha}, \text{ satisfaisant (4.2)}\}. \end{aligned}$$

Nous regardons l'opérateur

$$P(f, \varpi, \phi) = (\bar{\partial}_\phi f, \pi^\varpi \bar{\partial}_\phi \varpi),$$

défini sur $Map(\bar{\Delta}, \bar{D}) \times \mathcal{E}(\bar{\Delta}, \bar{D})$, à valeurs dans les espaces de sections (rappelons que nous avons trivialisé $T^{1,0}\bar{D}$ et $\Omega^{1,0}X$ dans un voisinage du disque considéré)

$$C^\alpha(\bar{\Delta}, T^{1,0}\bar{D}) \times C^\alpha(\bar{\Delta}, \Omega^{1,0}X).$$

Il est manifeste que ces espaces sont des variétés de Banach, et l'opérateur P est lisse entre ces espaces (on ne regarde que des ϕ lisses, mais on peut, pour avoir un espace de Banach, se contenter de ϕ de classe C^k pour k assez grand).

Lemme 4.5. *La différentielle en $(f(\zeta) = \zeta p, \varpi = \zeta e^0, \phi = 0)$ de P par rapport à (f, ϖ) est un isomorphisme.*

Admettons le lemme quelques instants. On en déduit que si la perturbation ϕ est assez petite, alors le problème $P(f, \varpi, \phi) = 0$ a une solution unique dans $Map(\bar{\Delta}, \bar{D}) \times \mathcal{E}(\bar{\Delta}, \bar{D})$; cela fournit le couple (f, E) du théorème 4.1 satisfaisant les propriétés (a) à (c). La propriété (d) reste vraie après petite perturbation. Analysons à présent la dépendance par rapport au point p : grâce à l'unicité de la solution, la propriété (e) est immédiate, tandis que (f) résulte du fait que la solution dépend de manière lisse des paramètres. Le théorème 4.1 est démontré. \square

Remarque 4.6. La condition que X demeure une sous-variété complexe a pour seule utilité de donner un sens à la condition (c). Mais la résolution ci-dessus reste valable sans cette condition, la différence étant que la condition $\varpi_i(0) = 0$ n'a plus d'interprétation géométrique naturelle.

Démonstration. Il nous reste à calculer la différentielle de l'opérateur P . Un vecteur tangent à $Map(\bar{\Delta}, \bar{D})$ est un champ de vecteur X le long de $\bar{\Delta}$, mais il sera plus commode d'utiliser

$$X = f + \bar{f},$$

avec f vecteur* de type $(1,0)$, représenté par

$$f = f^0 \frac{e_0}{\zeta} + \sum_{i>0} f^i e_i, \quad f^0, f^1, \dots \in C^{1+\alpha};$$

le facteur ζ s'explique en se rappelant que e_0 s'annule sur X , mais e_0/ζ est lisse. Les conditions au bord (4.1) se traduisent par

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{f^0}{\zeta} &= 0 \text{ sur le bord } S^1, \\ f^i(1) &= 0, \\ f^0(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

D'autre part, rappelons que $\varpi = \zeta e^0 + \sum_{i>0} \varpi_i e^i$, avec ϖ_i de classe $C^{1+\alpha}$, et conditions au bord (4.2).

En $\phi = 0$, l'opérateur P est simplement $P(f, \varpi) = (\bar{\partial}f, \pi^\varpi \bar{\partial}\varpi)$; plus précisément, le second opérateur est

$$\pi^\varpi \iota_{f_*} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} d\varpi;$$

compte tenu que la courbure du fibré —une 2-forme non dégénérée sur X —, est

$$de^0 = 2i\bar{\partial}\eta^{1,0} = F = F_{i\bar{j}} e^{\bar{i}} \wedge e^j,$$

la différentielle de P suivant ϖ s'écrit

$$\pi^{\zeta e^0} (\iota_{[X, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}]} d(\zeta e^0) + \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}} d\varpi) = \pi^{\zeta e^0} (\iota_{[f + \bar{f}, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}]} \zeta F + \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}} d\varpi_i \wedge e^i).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire explicitement le problème infinitésimal : étant donnés le long de $\bar{\Delta}$ un $(1,0)$ -vecteur $g = g^0 \frac{e_0}{\zeta} + \sum_{i>0} g^i e_i$, et une $(1,0)$ -forme $\rho = \sum_{i>0} \rho_i e^i$, les équations à résoudre deviennent

$$\frac{\partial f^i}{\partial \bar{\zeta}} = g^i, \quad i \geq 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \varpi_i}{\partial \bar{\zeta}} - \zeta \frac{\partial f^{\bar{j}}}{\partial \bar{\zeta}} F_{\bar{j}i} = \rho_i, \quad i > 0, \tag{4.5}$$

* il est commode ici d'utiliser le même symbole pour l'application f et pour sa version infinitésimale qui est un champ de vecteurs

avec les conditions au bord (4.3) et (4.2).

L'équation (4.4) définit les f^i à fonction holomorphe près sur $\overline{\Delta}$.

Pour ce qui est de f^0 , les conditions au bord (4.3) la définissent uniquement : en effet, commençons par choisir la solution φ_1^0 de

$$\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial \bar{\zeta}} = g^0$$

telle qu'au bord seuls les coefficients de Fourier strictement négatifs soient non nuls :

$$\varphi_1^0|_{S^1} = \sum_{k < 0} a_k e^{ik\theta};$$

pour obtenir la condition $\operatorname{Re}(f^0/\zeta) = 0$ au bord, nous rajoutons à φ_1^0 la fonction holomorphe

$$\varphi_2^0 = - \sum_{k > 2} \overline{a_{-k+2}} \zeta^k;$$

nous avons encore la liberté de rajouter à $f^0 = \varphi_1^0 + \varphi_2^0$ un terme

$$\varphi_3 = a_0 + a_1 \zeta - \overline{a_0} \zeta^2, \quad \operatorname{Re} a_1 = 0,$$

mais les coefficients a_0 et a_1 sont maintenant imposés par les conditions $f^0(0) = f^0(1) = 0$. Bien entendu $f^0 = \varphi_1^0 + \varphi_2^0 + \varphi_3^0$ est de classe $C^{1+\alpha}$ si g^0 est de classe C^α .

Passons maintenant aux ϖ_i : un choix des f_i ayant été fait, on peut résoudre (4.5) de sorte que les coefficients de Fourier positifs ou nuls des ϖ_i au bord soient nuls, mais cette condition est encore loin de la condition au bord (4.2) voulue, à savoir l'annulation complète des ϖ_i au bord ; examinons l'influence d'une modification des f^i ($i > 0$) par des fonctions holomorphes φ^i :

$$f^i \rightarrow f^i + \varphi^i;$$

en séparant

$$\varphi^i = a_0^i + a_1^i \zeta + \varphi_1^i, \quad \varphi_1^i = \sum_{k > 1} a_k^i \zeta^k,$$

on observe que les ϖ_i se transforment par la loi

$$\varpi_i \rightarrow \varpi_i + \zeta \overline{\varphi_1^j} F_{\overline{j}i} + (|\zeta|^2 - 1) \overline{a_1^j} F_{\overline{j}i};$$

par conséquent, en choisissant φ_1^j holomorphe de sorte que (ici nous utilisons le fait que la forme de Levi est non dégénérée, donc $(F_{\bar{i}j})$ admet un inverse $(F^{\bar{i}j})$)

$$\varphi_1^j|_{S^1} = -\zeta F^{\bar{i}j} \overline{\varpi_i}|_{S^1},$$

ce qui est possible puisque les $\varpi_i|_{S^1}$ sont à coefficients de Fourier strictement négatifs, on peut obtenir la condition au bord $\varpi|_{S^1} = 0$; la condition $\varpi_i(0) = 0$ est obtenue en fixant les coefficients a_1^i , et la seule liberté demeurant sur les f^i est d'ajouter une constante a_0^i , ce qui permet d'assurer la condition au bord $f^i(1) = 0$. De nouveau, la solution (f^i, ϖ_i) est de classe $C^{1+\alpha}$ si les g^i et les ρ_i sont de classe C^α , ce qui achève la démonstration du lemme. \square

4.3 Les disques holomorphes et la géométrie conforme

Il est intéressant de noter que les disques holomorphes dans l'espace des twisteurs d'une variété antiautoduale ont une interprétation en termes de disques dans la variété conforme. Si l'on dispose d'une métrique conforme $[g]$ sur la variété X^4 , alors la seconde forme fondamentale B d'une surface se décompose en trois composantes :

$$\begin{aligned} B &= B^+ + B^- \\ &= B^+ + B^{2,0} + B^{0,2}; \end{aligned}$$

en effet, le plan tangent $P \subset TX$ à la surface détermine une structure presque-complexe hermitienne J sur $TX = P \oplus P^\perp$; alors $B^+ = B^{1,1}$ est la partie J -invariante de B , satisfaisant

$$B_{JU,V}^+ = B_{U,V}^+, \quad U, V \in P,$$

et B^- est la partie J -anti-invariante, se décomposant elle-même en deux composantes $B^{2,0}$ et $B^{0,2}$ satisfaisant respectivement

$$B_{JU,V}^{2,0} = J^{P^\perp} B_{U,V}, \quad B_{JU,V}^{0,2} = -J^{P^\perp} B_{U,V}.$$

Une surface Σ dans X détermine, comme on l'a vu, une structure presque-complexe J sur TX le long de Σ , c'est-à-dire une section de la fibration twistorielle que l'on peut appeler le *relèvement de Σ à l'espace des twisteurs*. L'énoncé suivant est essentiellement contenu dans l'article [Gau86] de Gauduchon.

Lemme 4.7. *Supposons la métrique $[g]$ sur X antiautoduale, soit $p : \mathcal{N} \rightarrow X$ son espace de twisteurs, et Σ une surface de Riemann ; le relèvement à l'espace des twisteurs donne une correspondance entre*

1. *les immersions conformes $\Sigma \rightarrow X$, dont la seconde forme fondamentale satisfait $B^{0,2} = 0$;*
2. *les immersions holomorphes $\Sigma \rightarrow \mathcal{N}$, transverses à la fibration en P^1 .*

Notons que l'énoncé est donné dans le cas antiautodual, qui permet de représenter plus agréablement l'espace des twisteurs comme le fibré des structures presque-complexes hermitiennes, compatibles à l'orientation ; le cas autodual est obtenu par un simple changement d'orientation.

Démonstration. La correspondance entre la condition $B^{0,2} = 0$ et l'holomorphicité du relèvement à l'espace des twisteurs est montrée dans [Gau86]. Il reste à montrer qu'une immersion holomorphe $\iota : \Sigma \rightarrow \mathcal{N}$ provient bien du relèvement de $p \circ \iota$. Notons J la structure presque-complexe sur TX le long de $p\iota(\Sigma)$, induite par la section ι de l'espace des twisteurs. Soit un point $\sigma \in \Sigma$: par la définition même de la structure complexe de l'espace des twisteurs, la projection $p : T_{\iota(\sigma)}\mathcal{N} \rightarrow (T_{p\iota(\sigma)}X, J)$ est \mathbf{C} -linéaire, donc, puisque ι est holomorphe, $p \circ \iota : T_{\sigma}\Sigma \rightarrow (T_{p\iota(\sigma)}X, J)$ est aussi \mathbf{C} -linéaire, ce qui impose que la structure complexe le long de $p\iota(\Sigma)$ induite par l'immersion $p\iota$ est aussi J ; cela montre que ι est bien le relèvement à l'espace des twisteurs de $p \circ \iota$. \square

5 Le groupe des contactomorphismes

Il est bien connu qu'un contactomorphisme est essentiellement donné par une fonction réelle ; si l'on dispose d'un champ de Reeb R pour la forme de contact η , le contactomorphisme infinitésimal correspondant à la fonction réelle f n'est autre que

$$X_f = fR - \#d_H f,$$

où $\#$ est défini sur les 1-formes horizontales par $d\eta(\#\alpha, X) = \langle \alpha, X \rangle$; en particulier, X_f ne dépend que de f et de $d_H f$.

Il est moins facile de produire une paramétrisation $f \rightarrow \varphi_f$ des contactomorphismes proches de l'identité, de telle manière que φ_f ne dépende que de f et des dérivées *horizontales* de f . Par exemple, la paramétrisation naturelle

provenant de la symplectification semble utiliser toutes les dérivées de f , et la perte de dérivée qui en découle contraint ensuite à utiliser des arguments de type Nash-Moser, voir [CL95].

En dimension 3, Bland [Bla94] a proposé dans le cas de S^3 une paramétrisation du groupe des contactomorphismes qui ne consomme que les dérivées horizontales.

Dans cette section, nous proposons une autre paramétrisation, valable en dimension supérieure ou égale à 5, qui conviendra pour nos applications.

Nous supposons que la variété de contact est un S^1 -fibré au-dessus d'une variété symplectique (X, ω) :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & M \\ & & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

et que la forme de contact η est une 1-forme de connexion, avec $d\eta = \pi^*\omega$. On notera $H = \ker \eta$ la distribution de contact. L'idée de base de la construction qui suit est la simple constatation que, pour regarder les dérivées horizontales d'un contactomorphisme φ de M , il suffit de regarder les dérivées horizontales de la composition $\pi \circ \varphi : M \rightarrow X$.

Dans notre situation, il est souhaitable d'utiliser plutôt les espaces fonctionnels de Folland-Stein [FS74], c'est-à-dire des espaces de Sobolev anisotropes, mieux adaptés à la géométrie de contact : l'espace \mathcal{H}^k consiste des fonctions avec k dérivées suivant les directions de contact (et, par conséquent, $\frac{k}{2}$ dérivées dans la direction du champ de Reeb). Nous choisirons toujours k suffisamment grand, de sorte qu'on ait l'injection de Sobolev pour les espaces de Folland-Stein, $\mathcal{H}^k \subset C^0$; cela implique que les espaces de fonctions de classe \mathcal{H}^k sont des algèbres, ce qui permet de faire l'analyse non linéaire. Plus précisément, on a le lemme suivant :

Lemme 5.1. *Pour $k > n$, l'espace des fonctions de régularité \mathcal{H}^k sur la variété de contact X^n est une algèbre, et agit par multiplication sur les espaces \mathcal{H}^i pour $i < k$.*

Démonstration. On se ramène facilement aux considérations similaires sur les espaces de Sobolev usuels $L^{i,p}$ de fonctions ayant i dérivées dans L^p . En effet, rappelons que $\mathcal{H}^i \subset L^{i/2,2}$ et, classiquement, $L^{i/2,2} \subset L^p$ pour

$1/p = 1/2 - i/2n > 0$. Par conséquent, prenons deux fonctions $f \in \mathcal{H}^k$ et $g \in \mathcal{H}^i$, avec $i \leq k$, et montrons que le produit fg a i dérivées horizontales dans L^2 : nous devons donc montrer que $\nabla^j f \nabla^{i-j} g \in L^2$; si $k - j > n$ ou si $j > n$, alors l'un des deux facteurs est dans C^0 et le produit est clairement dans L^2 ; dans les cas restants, c'est-à-dire si $k - n \leq j \leq n$, alors $\nabla^j f \in L^p$ avec $1/p = 1/2 - (k-j)/2n$ (si $k-j \neq n$), et $\nabla^{i-j} g \in L^q$ avec $1/q = 1/2 - j/2n$ (si $j \neq n$), donc $\nabla^j f \nabla^{i-j} g \in L^r$ avec

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{k}{2n} < \frac{1}{2};$$

dans le cas où $j = k - n$ ou n , par exemple si $j = k - n$, on prend $p < \infty$ suffisamment grand et on arrive quand même à $r > 2$. \square

5.1 Espace d'applications de M dans X

Remarquons que si $\varphi : M \rightarrow M$ est de contact, alors $\psi = \pi \circ \varphi : M \rightarrow X$ vérifie la condition

$$\psi^* \omega \in \mathcal{I}(\eta), \quad (5.1)$$

où $\mathcal{I}(\eta)$ est l'idéal différentiel engendré par η . Nous pouvons aussi récrire la condition d'une manière différente : notons $\Omega_0^2 H$ l'espace des 2-vecteurs primitifs (dans le noyau de $d\eta$), et

$$\Omega_0^2 H := \Lambda^2 H^* / \mathbf{R} d\eta$$

l'espace des 2-formes horizontales primitives (on peut identifier $\Omega_0^2 H$ au noyau dans $\Omega^2 H$ de l'opérateur de contraction par $d\eta$), alors (5.1) devient équivalente à

$$\psi^* \omega = 0 \in \Omega_0^2 H.$$

Cela nous amène à étudier les applications $M \rightarrow X$ satisfaisant cette condition.

L'espace des applications $\psi : M \rightarrow X$ ayant k dérivées horizontales dans L^2 est une variété hilbertienne, $\mathcal{H}^k(M, X)$, paramétrée dans un voisinage de π par un champ de vecteurs horizontal ξ sur M , via l'application

$$\xi \longrightarrow (x \rightarrow \exp_{\pi(x)} \pi_* \xi),$$

où l'exponentielle sur X est prise par rapport à une métrique riemannienne fixée.

On notera $\mathcal{P}^k(M, X) \subset \mathcal{H}^k(M, X)$ le sous-espace des ψ satisfaisant (5.1); fixons $\psi_0 \in \mathcal{P}^k(M, X)$, et remarquons que

$$\psi_0^* \omega = f d\eta + \alpha \wedge \eta;$$

comme ω est fermée, il faut que

$$(df - \alpha) \wedge d\eta + d\alpha \wedge \eta = 0,$$

ce qui implique $\alpha = df$ et finalement

$$\psi_0^* \omega = d(f\eta).$$

Examinons, au voisinage de ψ_0 , l'application

$$P : \mathcal{H}^k(M, X) \rightarrow \mathcal{H}^{k-1}(M, \Omega_0^2 H)$$

définie par

$$P(\psi) = \psi^* \omega.$$

Puisque $d\omega = 0$ et $\psi_0^* \omega = d(f\eta)$, la forme $\psi^* \omega$ reste exacte, donc sa projection $P\psi$ sur $\Omega_0^2 H$ est à valeurs dans $\text{Im } d_H$. Or l'opérateur

$$d_H : \Gamma(M, H^*) \rightarrow \Gamma(M, \Omega_0^2 H)$$

s'insère dans un complexe hypoelliptique, le complexe de Rumin [Rum90, Rum94]; il en résulte en particulier que $\text{Im } d_H$ est fermé dans $\mathcal{H}^{k-1}(M, \Omega_0^2 H)$. De plus, la différentielle de P en ψ_0 n'est autre que

$$\xi \longrightarrow \mathcal{L}_\xi d(f\eta) = d\iota_\xi d(f\eta);$$

en particulier, la différentielle en π est (en notant $\flat = \#^{-1}$)

$$\xi \longrightarrow d(\flat\xi)$$

qui est une application submersive

$$\mathcal{H}^k(M, H) \longrightarrow \text{Im } d_H \cap \mathcal{H}^{k-1}(M, \Omega_0^2 H).$$

Plus généralement, la différentielle reste submersive en ψ_0 tant que la fonction f plus haut ne s'annule pas; on en déduit finalement que $P^{-1}(0)$ est une sous-variété hilbertienne de $H^k(X, Y)$:

Lemme 5.2. *L'espace \mathcal{P}_0^k des applications $\psi : M \rightarrow X$ satisfaisant (5.1), telles que $\psi^*\omega$ demeure non dégénérée sur H , est une sous-variété hilbertienne de $\mathcal{H}^k(M, X)$, avec espace tangent en π représenté par les champs de vecteurs horizontaux ξ de régularité \mathcal{H}^k tels que $d_H(\flat\xi) = 0$.*

5.2 Relèvement

On a vu que si $\varphi : M \rightarrow M$ est de contact, alors $\psi = \pi \circ \varphi$ satisfait la condition (5.1). Le lemme suivant montre que l'on peut presque récupérer le contactomorphisme φ à partir de ψ .

Lemme 5.3. *Supposons M simplement connexe. Si $\psi : M \rightarrow X$ satisfait (5.1), alors on peut relever ψ en un contactomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$; ce relèvement est unique, à la composition près par l'action d'un élément de S^1 .*

Démonstration. On fixe un point de base $m \in M$, et on choisit un relèvement $\mu \in M$ du point $\psi(m)$; étant donné un chemin horizontal $c(t)$ dans M allant de m à $p \in M$, il y a un unique relèvement horizontal $\mu(t)$ à M du chemin $\psi(c(t))$, tel que $\mu(0) = \mu$.

Affirmation. Le relèvement $\mu(1)$ de $\psi(p)$ ne dépend pas du chemin choisi.

Supposons cette affirmation acquise : alors on a défini un relèvement $\varphi : M \rightarrow M$ de ψ qui par construction envoie les directions horizontales sur les directions horizontales. Le seul choix est celui du relevé de $\psi(m)$, et une modification de ce relevé entraîne simplement la composition de φ avec un élément de S^1 .

Passons maintenant à la démonstration de l'affirmation ci-dessus. Supposons que l'on ait un lacet $c(t)$ dans M , donc $c(0) = c(1) = m$. Il s'agit de montrer que pour le relèvement μ , on a $\mu(1) = \mu(0) = p$. Puisque M est simplement connexe, il existe (voir par exemple [All98]) un disque legendrien dont le bord est ce lacet, c'est-à-dire que l'on peut trouver une homotopie legendrienne $c(s, t) \in M$, telle que

$$\begin{aligned} c(1, t) &= c(t), \\ c(0, t) &= m, \\ c(s, 0) = c(s, 1) &= m, \\ c^*\eta &= 0. \end{aligned}$$

On peut relever $t \rightarrow \varphi(c(s, t))$ en un chemin horizontal $t \rightarrow \mu(s, t)$, avec $\mu(s, 0) = \mu$. Maintenant, on a

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \mu^* d\eta = \int_{\partial([0,1] \times [0,1])} \mu^* \eta = \int_{[0,1]} \mu(\cdot, 1)^* \eta, \quad (5.2)$$

le chemin $\mu(s, 1)$ vit dans une fibre S^1 donnée, donc l'intégrale (5.2) s'annule exactement quand $\mu(0, 1) = \mu(1, 1)$, c'est-à-dire quand $\mu(1) = p$; d'un autre côté, par hypothèse,

$$\mu^* d\eta = \mu^* \pi^* \omega = c^* \Phi^* \omega = c^* (\eta \wedge \alpha + f d\eta) = 0,$$

à cause de la condition $c^* \eta = 0$, donc l'intégrale (5.2) est bien nulle. \square

5.3 Paramétrisation des contactomorphismes

Nous pouvons à présent proposer la paramétrisation suivante des contactomorphismes de M qui sont proches de l'identité. Fixons un point $m \in M$ et une section locale $\sigma : X \rightarrow M$ de π telle que $\sigma(\pi(m)) = m$. Pour $\psi : M \rightarrow X$ satisfaisant la condition (5.1), notons $\tilde{\psi}$ le relevé de ψ construit par le lemme 5.3, tel que $\tilde{\psi}(m) = \sigma(\psi(m))$. Nous pouvons récrire le lemme 5.3 de la manière suivante :

Lemme 5.4. *Si M est simplement connexe, alors tout contactomorphisme φ de M , proche de l'identité, ayant k dérivées horizontales, s'écrit de manière unique $\varphi = u \circ \tilde{\psi}$, avec $u \in S^1$ et $\psi \in \mathcal{P}^k$.*

Maintenant, par le lemme 5.2, nous avons une bonne paramétrisation de \mathcal{P}^k : en effet, puisque \mathcal{P}^k est une variété hilbertienne, nous avons une carte locale

$$\Psi : T_\pi \mathcal{P}^k \longrightarrow \mathcal{P}^k,$$

définie sur une petite boule de $T_\pi \mathcal{P}^k = \{\alpha \in \mathcal{H}^k(M, H^*), d_H \alpha = 0\}$; or la cohomologie du complexe de Rumin calcule la cohomologie DeRham, donc, si $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$, on peut paramétrer les α par

$$\alpha = d_H f, \quad f \in \mathcal{H}^{k+1}, \quad \int_M f = 0.$$

Finalement, étant donnée $f \in \mathcal{H}^{k+1}$, suffisamment petite, on peut poser

$$\begin{aligned} u &= \exp \int_M f, \\ \psi &= \Psi(d_H f), \end{aligned} \quad \varphi = u \circ \tilde{\psi}, \quad (5.3)$$

et on a démontré le résultat suivant :

Théorème 5.5. *Si M est simplement connexe, l'application (5.3) constitue une paramétrisation locale des contactomorphismes de M , proches de l'identité, et ayant k dérivées horizontales, par des fonctions de régularité \mathcal{H}^{k+1} . \square*

Cette paramétrisation nous fournit sur les contactomorphismes proches de l'identité la structure de variété hilbertienne que nous utiliserons dans la suite. On notera \mathcal{G}^k le groupe des contactomorphismes de M avec k dérivées horizontales dans L^2 .

6 Jauge de Coulomb

Revenons à présent à l'espace des twisteurs \mathcal{T} , qui n'est autre que le S^1 -fibré $\mathcal{O}(-1, 1)$ au-dessus de $P^1 \times P^1$. Étant donnée une perturbation $\phi \in \Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}$ de la structure CR, on cherche à quelle condition existe une action de S^1 du type produit par le corollaire 4.2. Tout d'abord on a le résultat suivant.

Lemme 6.1. *Une action de S^1 par contactomorphismes sur \mathcal{T} , proche de l'action donnée, lui est conjuguée par un contactomorphisme.*

Démonstration. L'action de S^1 nous fournit une nouvelle forme de contact, η' , dont la différentielle provient de la base $P^1 \times P^1$:

$$d\eta' = \pi^* \omega',$$

où ω' est une 2-forme fermée, représentant (à une constante près) le c_1 du fibré, et donc dans la même classe de cohomologie que ω ; si ω' est proche de ω , alors, par le lemme de Moser, ω' s'en déduit par un difféomorphisme, qui se relève aux S^1 -fibrés en un difféomorphisme envoyant η sur η' . \square

Ce lemme signifie qu'au lieu de chercher une action de S^1 pour laquelle les coefficients de Fourier de ϕ soient positifs ou nuls, il suffit de chercher un contactomorphisme φ de \mathcal{T} tel que $\varphi^*\phi$ soit à coefficients de Fourier positifs ou nuls par rapport à l'action standard de S^1 .

L'action des contactomorphismes sur les structures CR s'apparente à l'action d'un groupe de jauge. L'idée est alors, à l'instar de Bland [Bla94] sur S^3 , de trouver une jauge de Coulomb permettant de fixer le contactomorphisme ; cette jauge sera choisie de sorte de tuer autant de coefficients négatifs que possible dans ϕ .

Lemme 6.2. *Le groupe \mathcal{G}^{k+1} agit de manière lisse sur $\mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0})$ par $\phi \rightarrow \varphi^*\phi$; l'application tangente à l'action en l'origine est*

$$f \in \mathcal{H}^{k+2} \longrightarrow \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f,$$

et son image est fermée.

Démonstration. Notons $\psi = \pi \circ \varphi$, où π est la projection $\mathcal{T} \rightarrow P^1 \times P^1$; on sait que $\varphi \in \mathcal{G}^{+1}$ signifie essentiellement que $\psi \in \mathcal{H}^{+1}(\mathcal{T}, P^1 \times P^1)$; l'action de φ sur ϕ consiste à déplacer le graphe de $1 + \phi$, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} (\varphi^*\phi)_x &= \pi_{1,0} \circ (T_x\varphi)^{-1} \circ (1 + \phi_{\varphi(x)}) \circ (\pi_{0,1} \circ (T_x\varphi)^{-1} \circ (1 + \phi_{\varphi(x)}))^{-1} \\ &= \pi_{1,0} \circ (T_x\psi)^{-1} \circ (1 + \phi_{\varphi(x)}) \circ (\pi_{0,1} \circ (T_x\psi)^{-1} \circ (1 + \phi_{\varphi(x)}))^{-1}, \end{aligned}$$

où ϕ est interprété comme un morphisme $\pi^*T^{0,1}(P^1 \times P^1) \rightarrow \pi^*T^{1,0}(P^1 \times P^1)$; on déduit alors facilement la régularité annoncée, à partir du lemme 5.1.

La différentielle en f de l'action de \mathcal{G}^{k+1} modifie un vecteur de type $(0,1)$, X , par

$$[X_f, X] = [fR - \#df, X];$$

la structure complexe est modifiée par

$$\phi_X = [X_f, X]^{1,0} = [-\# \bar{\partial} f, X]^{1,0} = (\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f)_X.$$

L'image de $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ est fermée car l'opérateur $\bar{\partial}$ est hypoelliptique sur les 0-formes en signature $(1,1)$, voir la démonstration du corollaire 3.2. \square

Corollaire 6.3. *Supposons donné dans $\mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0})$ un supplémentaire W de $\text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$, invariant sous l'action des CR-automorphismes de \mathcal{T} . Alors pour tout ϕ proche de 0, il existe un contactomorphisme φ , proche de l'identité, tel que $\varphi^* \phi \in W$; de plus, φ est unique modulo les CR-automorphismes de \mathcal{T} .*

Démonstration. L'existence d'un supplémentaire W vient de ce que l'image de $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ est fermée par le lemme 6.2. Le noyau de $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ est formé des CR-automorphismes infinitésimaux ; dans le cas de $\mathcal{T} = \partial \mathbf{H} H^1 = \partial \mathbf{R} H^4$, le groupe des automorphismes CR est le groupe $Sp_{1,1} = SO_{1,4}$, c'est-à-dire le groupe des transformations conformes de S^3 (dont \mathcal{T} est l'espace des twisteurs), de dimension 10 ; considérons le sous-groupe

$$\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$$

des contactomorphismes de \mathcal{T} fixant deux points, de sorte que $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 = SO_{1,4}$; considérons l'action de \mathcal{G}_0 suivie de la projection sur $\text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ parallèlement à W :

$$F : \mathcal{G}_0^{k+1} \times \mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}) \rightarrow \mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}) \rightarrow \text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial},$$

alors la différentielle de F par rapport à la première variable est un isomorphisme, donc, par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(\varphi, \phi) = 0$, que l'on peut récrire

$$\varphi^* \phi \in W,$$

à une unique solution proche de l'identité, $\varphi \in \mathcal{G}_0^{k+1}$, si ϕ est assez petit. \square

Lemme 6.4. *Comme supplémentaire W de $\text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$, on peut choisir*

$$W = (\text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} \pi_{\leq 0})^\perp,$$

où $\pi_{\leq 0}$ est la projection sur les coefficients de Fourier négatifs ou nuls.

Une structure CR intégrable ϕ , proche de la structure standard, admet un remplissage holomorphe si et seulement si, dans la jauge de Coulomb $\varphi^ \phi \in W$ construite par le corollaire 6.3, on a $\varphi^* \phi$ à coefficients de Fourier positifs ou nuls.*

Démonstration. Rappelons que nous regardons l'image des fonctions *réelles* ; si f est réelle, alors les coefficients de Fourier positifs de f sont déterminés par ses coefficients de Fourier négatifs, et il en est de même pour l'image $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f$, puisque $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ commute à l'action de S^1 ; on en déduit que l'espace W proposé est bien un supplémentaire de $\text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$.

Pour montrer la seconde assertion, notons tout d'abord que si en jauge de Coulomb on a des coefficients de Fourier positifs ou nuls, alors le remplissage holomorphe existe par le lemme 2.2 ; réciproquement, par le corollaire 4.2, si un remplissage existe, alors on a un contactomorphisme φ tel que $\varphi^* \psi$ soit à coefficients de Fourier positifs ou nuls ; il est clair que $\varphi^* \psi$ est dans l'orthogonal de $\text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} \pi_{<0}$, mais a priori il n'y a pas de raison pour que $\varphi^* \psi$ soit orthogonal aux composantes S^1 -invariantes de $\text{Im } \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} \pi$; cependant, on peut obtenir aussi cette condition, comme dans le corollaire 6.3, en composant φ par un contactomorphisme qui sera cette fois S^1 -invariant (et donc préservera l'annulation des coefficients strictement négatifs) ; par conséquent, après cette modification, $\varphi^* \phi \in W$, ce qui signifie, par unicité de la jauge de Coulomb (aux CR-automorphismes près), que φ est le contactomorphisme mettant ϕ en jauge de Coulomb ; en particulier, dans cette jauge, seuls subsistent les coefficients de Fourier positifs ou nuls. \square

7 L'image du hessien complexe

Pour utiliser plus concrètement le lemme 6.4, il faut déterminer l'image du hessien complexe $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$. Pour cela, nous utilisons le fait important que l'espace des twisteurs \mathcal{T} est un espace homogène sous le groupe $Sp_1 Sp_1$.

7.1 L'espace des twisteurs comme espace homogène

Rappelons que par (1.7), l'espace des twisteurs \mathcal{T} est décrit comme une hypersurface réelle de P^3 ; l'action de $Sp_1 Sp_1$ sur $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ est simplement donnée par l'action sur chaque couple de coordonnées (z_1, z_2) et (z_3, z_4) ; ainsi les actions de $Sp_1 Sp_1$ sur \mathcal{T} et sur $P^1 \times P^1$ sont-elles compatibles avec la projection $\mathcal{T} \rightarrow P^1 \times P^1$. En outre, l'action de $Sp_1 Sp_1$ préserve toutes les structures d'espace des twisteurs de \mathcal{T} , c'est-à-dire la structure CR, la struc-

ture réelle, la structure de contact holomorphe, et les P^1 réels ; on remarquera que, dans ce formalisme, la base de la projection twistorielle s'écrit comme le quotient $S^3 = Sp_1 Sp_1 / SO_3$.

Décomposons l'algèbre de Lie de Sp_1 comme

$$\mathfrak{sp}_1 = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbf{R}^2, \quad \mathfrak{u}_1 = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

Le stabilisateur du point base,

$$* = [1 : 0 : 1 : 0],$$

est un U_1 plongé diagonalement dans $Sp_1 Sp_1$, de sorte que $\mathcal{T} = Sp_1 Sp_1 / U_1$; on a donc la décomposition

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 &= \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2 \\ &= \mathfrak{u}_1^+ \oplus \mathfrak{m}, \\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{u}_1^- \oplus \mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{u}_1^+ = \{(x, x) \in \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_1\}$ est le stabilisateur de $*$ et \mathfrak{m} son orthogonal ; le $\mathfrak{u}_1^- = \{(x, -x) \in \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_1\}$ représente la direction du champ de Reeb, et $\mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2$ les directions de contact, munies de la structure CR naturelle.

Cette description fournit une identification naturelle du fibré tangent de \mathcal{T} et de la distribution de contact H comme fibrés homogènes :

$$T\mathcal{T} = Sp_1 Sp_1 \times_{U_1} \mathfrak{m}, \quad H = Sp_1 Sp_1 \times_{U_1} (\mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2).$$

La modification ϕ de la structure CR s'écrit comme une section (équivariante) de $\mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0}$, soit, en choisissant une base (e_1, e_2) de $\mathfrak{m}_{1,0}$,

$$\phi = \phi_i^j e^{\bar{i}} \otimes e_j.$$

La courbure du S^1 -fibré s'écrit $F = -(e^1 \wedge e^{\bar{1}} - e^2 \wedge e^{\bar{2}})$, de sorte que la condition $\phi \lrcorner F = 0$ de (2.3) devient

$$\phi_2^1 + \phi_1^2 = 0. \tag{7.1}$$

Si ϕ provient de la construction twistorielle, telle que décrite dans la section 1.1, alors ϕ doit préserver les P^1 réels ; or le $T^{1,0}$ des P^1 réels est engendré par $e_1 + e_2$, ce qui conduit à la condition

$$\phi_1^1 + \phi_2^1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 = 0. \quad (7.2)$$

Enfin, l'opérateur $\# : \mathfrak{m}^{0,1} \rightarrow \mathfrak{m}_{1,0}$ est donné par

$$\#e^{\bar{1}} = -ie_1, \quad \#e^{\bar{2}} = ie_2. \quad (7.3)$$

7.2 Décomposition harmonique

L'idée est bien sûr d'utiliser la décomposition harmonique sous les représentations irréductibles de $Sp_1 Sp_1$ pour comprendre l'image de l'opérateur homogène $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$. Notons $\sigma^k = \text{Sym}^k \mathbf{C}^2$ les représentations irréductibles de Sp_1 ; les représentations irréductibles ρ de $Sp_1 \times Sp_1$ sont simplement les produits des représentations des deux facteurs,

$$V_\rho = \sigma^K \otimes \sigma^L,$$

elles descendent à $Sp_1 Sp_1 = Sp_1 \times Sp_1 / \mathbf{Z}_2$ si $K + L$ est pair.

Si l'on dispose d'un fibré homogène $E = Sp_1 Sp_1 \times_{\rho_0} W$, où ρ_0 est une représentation de U_1 dans W , alors l'espace de ses sections L^2 se décompose comme une somme directe hilbertienne,

$$L^2(E) = \sum_{\rho} V_{\rho} \otimes \text{Hom}_{U_1}(V_{\rho}, W),$$

où un élément $v \otimes w \in V_{\rho} \otimes \text{Hom}_{U_1}(V_{\rho}, W)$ correspond à la section de E sur \mathcal{T} donnée par l'application équivariante $s : Sp_1 Sp_1 \rightarrow W$, définie par

$$s(g) = \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle.$$

Regardons comment décrire l'action de la structure réelle : rappelons que, par (1.5), la structure réelle s'écrit $\tau([z^1 : z^2 : z^3 : z^4]) = [-\bar{z}^2 : \bar{z}^1 : -\bar{z}^4 : \bar{z}^3]$; en particulier, pour le point base $*$, on a

$$\tau([1 : 0 : 1 : 0]) = [0 : 1 : 0 : 1] = g_0([1 : 0 : 1 : 0]),$$

avec

$$g_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in Sp_1^{diag} \subset Sp_1 Sp_1;$$

on notera que $g_0^2 = -1$ dans Sp_1 , donc $g_0^2 = 1$ dans $Sp_1 Sp_1$. Puisque la structure réelle commute à l'action de $Sp_1 Sp_1$, on déduit que, pour une fonction $f(g) = \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$, on a

$$\begin{aligned} \tau^* f(g*) &= f(\tau g*) \\ &= f(g\tau*) \\ &= f(gg_0*) \\ &= \langle w \circ \rho(g_0^{-1}), \rho(g^{-1})v \rangle. \end{aligned} \tag{7.4}$$

De manière similaire, on obtient, si $\phi(g*) = g_* \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$,

$$\begin{aligned} \tau^* \bar{\phi}(g*) &= \tau_* \bar{\phi}(\tau g*) \\ &= \tau_*(gg_0)_* \langle \bar{w} \circ \rho(g_0)^{-1}, \rho(g^{-1})v \rangle \\ &= g_*(\tau g_0)_* \langle \bar{w} \circ \rho(g_0)^{-1}, \rho(g^{-1})v \rangle; \end{aligned} \tag{7.5}$$

en prenant des coordonnées complexes (z^2, z^4) sur $\mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2$, comme dans le calcul menant à la formule (1.10), on voit que

$$(\tau g_0)_*(z^2, z^4) = -(\bar{z}^2, \bar{z}^4);$$

en particulier, si $w = w_i^j e^{\bar{i}} \otimes e_j$, alors

$$\tau' w := (\tau g_0)_* \bar{w} = \overline{w_i^j} e^{\bar{i}} \otimes e_j$$

est anti- \mathbf{C} -linéaire et anti- U_1 -invariant (car g_0 anticommute à l'action de U_1); comme nous regardons $Sp_1 Sp_1$ plutôt que le produit $Sp_1 \times Sp_1$, la représentation $V_\rho = \sigma^K \otimes \sigma^L$ (avec $K+L$ pair) admet toujours une structure réelle τ_ρ , ce qui nous permet d'écrire finalement

$$\tau^* \bar{\phi}(g*) = g_* \langle \tau' w \circ \rho(g_0^{-1}) \circ \tau_\rho, \rho(g^{-1})\tau_\rho v \rangle; \tag{7.6}$$

dans cette formule, on notera que $\tau' w \circ \rho(g_0^{-1}) \circ \tau_\rho$ est bien maintenant un élément de $\text{Hom}_{U_1}(V_\rho, \mathbf{m}^{0,1} \otimes \mathbf{m}_{1,0})$, donc on a bien représenté $\tau^* \bar{\phi}$ dans la décomposition harmonique.

De la même manière, si on a une fonction $f = \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$, alors on peut représenter sa conjuguée comme

$$\bar{f} = \langle \bar{w} \circ \tau_\rho, \rho(g^{-1})\tau_\rho v \rangle. \quad (7.7)$$

Passons maintenant à l'opérateur $\bar{\partial}$: fixons dans chaque facteur de $(\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1) \otimes \mathbf{C}$ le \mathfrak{sl}_2 -triplet $(H_i, X_i, Y_i)_{i=1,2}$

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

on notera que les Y_i engendrent $\mathfrak{m}_{0,1}$, $\mathfrak{m}_{1,0}$ l'étant par les X_i ; la notation (X_i, Y_i) est donc redondante avec $(e_i, e_{\bar{i}})$, mais sera utilisée quand on voudra souligner l'aspect représentation de \mathfrak{sl}_2 .

De ce point de vue, une représentation $V_\rho = \sigma^K \otimes \sigma^L$ se décompose en sous-espaces propres de dimension 1 pour les valeurs propres $((k = K, K - 2, \dots, -K), (l = L, L - 2, \dots, -L))$ du couple (H_1, H_2) :

$$V_\rho = \sum_{k,l} V_\rho(k, l);$$

l'action de Y_1 (resp. Y_2) diminue le poids k (resp. l) de 2 :

$$\begin{array}{ccc} V(k-2, l) & \xleftarrow{Y_1} & V(k, l) \\ & \downarrow Y_2 & \\ & V(k, l-2) & \end{array}.$$

Nous pouvons maintenant traduire la condition infinitésimale $\bar{\partial}_H \phi = 0$ issue de (2.3) en termes de cette décomposition harmonique : écrivons $\phi = \sum \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$, où $v \otimes w \in V_\rho \otimes \text{Hom}_{U_1}(V_\rho, \mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0})$, alors, pour $\dot{g} \in \mathfrak{m}_{0,1}$, on a

$$\nabla^{0,1} \phi(g\dot{g}) = \sum \langle w \circ \rho_*(\dot{g}), \rho(g^{-1})v \rangle,$$

si bien que la condition $\bar{\partial}_H \phi = 0$ devient

$$w_{\bar{2}} \rho_*(Y_1) - w_{\bar{1}} \rho_*(Y_2) = 0. \quad (7.8)$$

Passons au hessien complexe $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ agissant sur les fonctions : pour une fonction $f = \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$, on obtient

$$\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f = \langle \#(w \circ \rho_*) \circ \rho_*, \rho(g^{-1})v \rangle,$$

où $\#(w \circ \rho_*) \circ \rho_* \in \text{Hom}_{U_1}(V_\rho, \mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0})$; plus concrètement, en écrivant $\#(w \circ \rho_*) \circ \rho_* = \phi_i^j e^{\bar{i}} \otimes e_j$, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_1^1 &= -iw \circ (\rho_* Y_1)^2, \\ \phi_1^2 &= iw \circ \rho_* Y_2 \circ \rho_* Y_1, \\ \phi_2^1 &= -iw \circ \rho_* Y_1 \circ \rho_* Y_2, \\ \phi_2^2 &= iw \circ (\rho_* Y_2)^2.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Du point de vue des poids, ϕ dépend de w de la manière suivante :

- $\phi_1^1(k, l)$ est déterminé par $w(k-4, l)$;
- $\phi_1^2(k, l) = -\phi_2^1(k, l)$ est déterminé par $w(k-2, l-2)$;
- $\phi_2^2(k, l)$ est déterminé par $w(k, l-4)$.

Notons que la compatibilité à la structure réelle s'écrit $\tau^* \bar{\phi} = \phi$ et est impliquée, si $\phi = \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f$, par la condition $\tau^* \bar{f} = -f$ (soit $\tau^* f = -f$ puisque f est réelle).

Enfin, nous avons une action de S^1 sur \mathcal{T} , donnée par

$$u[z^1 : z^2 : z^3 : z^4] = [uz^1 : uz^2 : z^3 : z^4];$$

cette action n'est pas fournie par un élément du groupe $Sp_1 Sp_1$ (contrairement à $Sp_1 Sp_1$, elle ne préserve pas la structure réelle), mais elle commute à l'action de $Sp_1 Sp_1$, et va donc préserver les décompositions harmoniques; sur le point base $*$, on a, pour $u \in S^1$,

$$u* = [u : 0 : 1 : 0]$$

qui est égal à l'action de $u \times 1 \in Sp_1 Sp_1$ sur $*$; par conséquent, si on a une section $s(g*) = g_* \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$ d'un fibré tensoriel E sur \mathcal{T} , alors, comme dans le calcul de (7.5), on obtient

$$u_* s(g*) = g_* \langle u(u \times 1)^{-1} \circ w \circ \rho(u \times 1), \rho(g^{-1})v \rangle;$$

notons que

$$u(u \times 1)^{-1}[1 : z^2 : 1 : z^4] = [1 : u^2 z^2 : 1 : z^4];\tag{7.10}$$

dans la décomposition

$$\text{Hom}_{U_1}(V_\rho, E) = \sum \text{Hom}_{U_1}(V_\rho(k, l), E),$$

les poids de l'action de S^1 sont donc les sommes des k et des poids de l'action de S^1 sur E par (7.10); en particulier, pour $E = \mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0}$, les poids de l'action (7.10) sont

$$\begin{aligned} -4 & \text{ sur } e^{\overline{1}} \otimes e_1, \\ -2 & \text{ sur } e^{\overline{1}} \otimes e_2, e^{\overline{2}} \otimes e_1, \\ 0 & \text{ sur } e^{\overline{2}} \otimes e_2; \end{aligned} \tag{7.11}$$

on vérifie aisément dans (7.9) que, comme il se doit, l'opérateur $\overline{\partial}_H \# \overline{\partial}$, commutant à l'action de S^1 , préserve ses poids.

7.3 Calcul de l'image

Nous sommes maintenant prêts à calculer l'image du hessien complexe, en tenant compte de l'action de S^1 ; nous fixons une représentation $V_\rho = V^{K,L}$ de $Sp_1 Sp_1$ et voulons comprendre l'image des fonctions réelles par $\overline{\partial}_H \# \overline{\partial}$, en nous intéressant plus particulièrement aux composantes à poids négatif par rapport à l'action de S^1 .

Nous partons d'un

$$\phi = \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle, \quad w \in \text{Hom}_{U_1}(V_\rho, \mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0});$$

remarquons que le poids de l'action de U_1 sur $\mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0}$ est égal à 4, donc les seules composantes de w non triviales sur la décomposition $V_\rho = \sum V(k, l)$ sont à $k + l = 4$. De plus les coefficients w_i^j satisfont les conditions (7.1) et (7.8) : la seconde condition signifie que $w_{\overline{2}}^j(k, l)$ est déterminé par $w_{\overline{1}}^j(k - 2, l + 2)$, et la première que $w_{\overline{2}}^1 = -w_{\overline{1}}^2$; autrement dit, sur les quatre coefficients de $w(k, l)$, les coefficients $w_{\overline{2}}^1(k, l)$, $w_{\overline{2}}^2(k, l)$ et $w_{\overline{1}}^2(k, l)$ sont déterminés par $w_{\overline{1}}^1(k - 2, l + 2)$ et $w_{\overline{1}}^2(k - 2, l + 2)$, pourvu que $k - 2 \geq -K$.

Nous cherchons une fonction réelle

$$f = \langle w', \rho(g^{-1})v \rangle, \quad w' \in \text{Hom}_{U_1}(V_\rho, \mathbf{C}),$$

telle que $\overline{\partial}_H \# \overline{\partial} f = \phi$, du moins sur les composantes à poids négatifs pour S^1 (la condition que f soit réelle implique que les coefficients sur les poids positifs soient déterminés par ceux sur les poids négatifs); les seules composantes non nulles de w' doivent bien entendu se trouver sur la droite $k + l = 0$, et l'opérateur est fourni algébriquement par les formules (7.9).

Théorème 7.1. *Étant donné ϕ sur \mathcal{T} , satisfaisant $\phi \lrcorner F = 0$ et $\bar{\partial}_H \phi = 0$, il existe une fonction f telle que*

1. $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f_- = \phi_-$, où f_- et ϕ_- représentent les composantes à coefficients de Fourier strictement négatifs par rapport à l'action de U_1 ,
2. la partie de f invariante sous U_1 est nulle,
3. f est réelle,

si et seulement si la décomposition $\phi = \sum \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$ satisfait les conditions :

1. si $V_\rho = V^{K, K+2}$, alors $w_1^1(-K+2, K+2) = 0$;
2. si $V_\rho = V^{K, L}$ avec $K \leq L-4$, alors

$$w_1^1(-K, K+4) = w_1^2(-K, K+4) = w_2^1(-K, K+4) = 0.$$

De plus, si ϕ est compatible à la structure réelle ($\tau^* \bar{\phi} = \phi$), alors f l'est aussi ($\tau^* f = -f$).

Démonstration. Il y a trois cas suivant les valeurs de K et L .

Premier cas : $K \geq L$. Dans ce cas (voir la figure 1), pour $k < 0$, on peut trouver $w'(k, -k)$ unique tel que les relations (7.9) soient satisfaites pour $k > 0$. En effet, le terme $w(k, l)$ pour le plus petit k possible est $w(-L+4, L)$, et on peut trouver $w'(-L, L)$, $w'(-L+2, L-2)$ et $w'(-L+4, L-4)$ dont l'image tue exactement $w(-L+4, L)$; le terme suivant est $w(-L+6, L-2)$: dans celui-ci, les coefficients w_1^1 , w_1^2 et w_2^1 sont déterminés, comme on l'a vu, par $w(-L+4, L)$ et en réalité déjà tués par $w'(-L+2, L-2)$ et $w'(-L+4, L-4)$, donc il ne reste que $w_2^2(-L+6, L-2)$ qui est tué par le choix judicieux de $w'(-L+6, L-6)$; le processus se poursuit pour $k < 0$. Le fait que les relations de compatibilité (7.8) soient exactement les obstructions à résoudre le problème de proche en proche est une conséquence du fait que l'image de $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ est dans le noyau de $\bar{\partial}$; la vérification directe est un exercice facile sur les représentations de \mathfrak{sl}_2 .

La condition que f soit réelle s'écrit, d'après (7.7), comme l'invariance par $w' \otimes v \rightarrow w' \circ \tau_\rho \otimes \tau_\rho v$; comme τ_ρ envoie $V(k, l)$ sur $V(-k, -l)$, on voit que les $w'(k, -k)$ pour $k > 0$ sont déterminés par les $w'(k, -k)$ pour $k < 0$; la

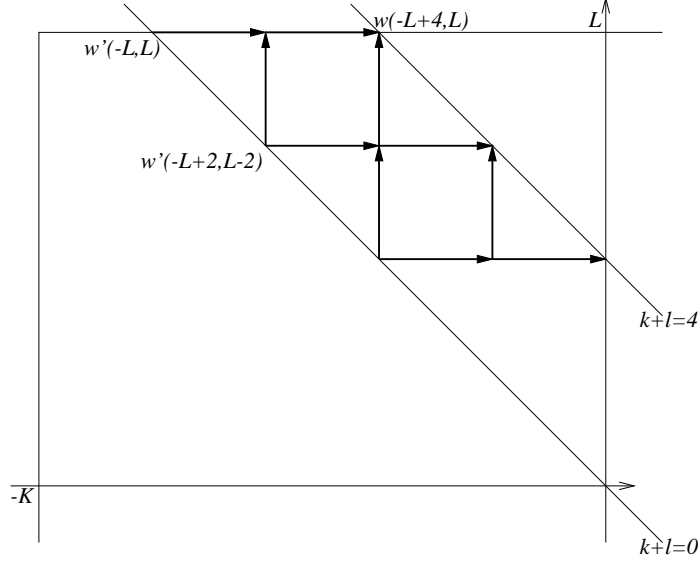


FIG. 1: cas $K \geq 0$

seule liberté restante est donc celle de $w'(0, 0)$, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Deuxième cas : $K = L - 2$. Le processus est exactement le même (figure 2), à la différence que le terme $w(k, l)$ avec k le plus petit possible est maintenant $w(-K + 2, K + 2)$, et on ne peut pas tuer le terme $w_1^1(-K + 2, K + 2)$ par un terme $w'(-K - 2, K + 2)$ qui n'existe pas ; la résolution est donc possible si et seulement si $w_1^1(-K + 2, K + 2) = 0$.

Troisième cas : $K \leq L - 4$. Le processus est à nouveau identique : pour pouvoir tuer le terme $w(-K, K + 4)$, il faut que

$$w_1^1(-K, K + 4) = w_1^2(-K, K + 4) = w_2^1(-K, K + 4) = 0;$$

pour pouvoir tuer le terme $w(-K + 2, K + 2)$, il faut que

$$w_1^1(-K + 2, K + 2) = 0,$$

mais cette condition est une conséquence de l'annulation de $w_2^1(-K, K + 4)$ et de la contrainte (7.8) ; ensuite on peut résoudre de proche en proche.

Finalement, examinons la compatibilité à la structure réelle : rappelons

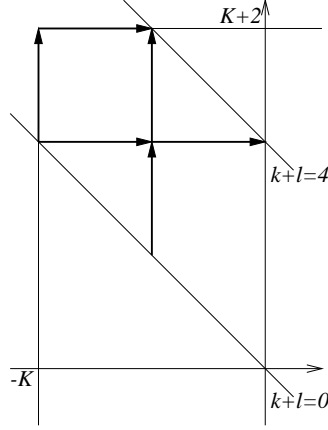


FIG. 2: cas $K = L - 2$

que par (7.6), l'opération $\phi \rightarrow \tau^* \bar{\phi}$ se traduit par

$$w \otimes v \longrightarrow \tau' w \rho(g^{-1}) \tau_\rho \otimes \tau_\rho v,$$

et $f \rightarrow -\tau^* f = -\tau^* \bar{f}$ par

$$w' \otimes v \longrightarrow -\overline{w'} \tau_\rho \rho(g_0^{-1}) \otimes \tau_\rho v$$

d'après (7.4) et (7.7); par conséquent, il suffit de vérifier que la modification $w \rightarrow \tau' w$ impose $w' \rightarrow -\overline{w'}$ sur la solution; comme τ' est simplement la conjugaison sur les coefficients w_i^j , c'est une conséquence claire des formules (7.9).

□

8 L'espace des structures CR remplissables

Notons l'espace des structures CR intégrables sur \mathcal{T} , de régularité \mathcal{H}^k ,

$$\mathcal{C}^k = \{\phi \in \mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}), \bar{\partial}_H \phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0, \phi \lrcorner F = 0\};$$

bien entendu, pour que ϕ définisse une structure CR, il faut que $T_\phi^{0,1} \cap \overline{T_\phi^{0,1}} = 0$, mais cette condition est automatiquement satisfaite pour les petites perturbations auxquelles nous nous intéressons.

Lemme 8.1. *L'opérateur*

$$\bar{\partial}_H : \{\phi \in \mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}), \phi \lrcorner F = 0\} \longrightarrow \mathcal{H}^{k-1}(\Omega^{0,2} \otimes T^{1,0})$$

est surjectif.

Le lemme est facile à démontrer en l'absence de la condition $\phi \lrcorner F = 0$, car il s'agit alors simplement d'un calcul de cohomologie ; la version écrite ici est la conséquence d'un résultat plus fort dont nous aurons plus loin, le lemme 9.2.

Ce lemme implique immédiatement que \mathcal{C}^k est une variété lisse près de l'origine. Plus précisément, notons P un inverse à droite de l'opérateur $\bar{\partial}_H$ du lemme précédent. Comme l'opérateur commute à l'action de S^1 , on peut choisir P vérifiant la même propriété. Alors une carte locale $\Phi : \phi \in \mathcal{C}^k \rightarrow \phi_1 \in T_0\mathcal{C}^k$ est fournie par le choix

$$\phi_1 = \phi + P\frac{1}{2}[\phi, \phi], \quad (8.1)$$

de sorte que $\bar{\partial}_H\phi_1 = 0$. Le point important est que si ϕ est à coefficients de Fourier positifs ou nuls, il en est de même pour $[\phi, \phi]$, et par conséquent pour $P[\phi, \phi]$, donc finalement pour ϕ_1 . La réciproque est vraie, puisqu'on retrouve ϕ à partir de ϕ_1 par

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots, \quad \phi_i = -P\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < i} [\phi_j, \phi_{i-j}].$$

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 8.2. *Près de l'origine, l'espace \mathcal{C}^k est une variété (hilbertienne) lisse, d'espace tangent à l'origine*

$$T_0\mathcal{C}^k = \{\phi \in \mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}), \bar{\partial}_H\phi = 0, \phi \lrcorner F = 0\},$$

et la carte locale $\phi \in \mathcal{C}^k \rightarrow \phi_1 \in T_0\mathcal{C}^k$ définie par (8.1) satisfait la condition : ϕ est à coefficients de Fourier positifs ou nuls si et seulement si ϕ_1 est à coefficients de Fourier positifs ou nuls. \square

Rappelons que \mathcal{T} est le bord d'un domaine de P^3 . Plus généralement, nous regardons maintenant l'espace des structures CR *remplissables*,

$$\mathcal{C}_+^k \subset \mathcal{C}^k,$$

c'est-à-dire des structures CR qui bordent une variété complexe, déformation du domaine de P^3 initial.

Théorème 8.3. \mathcal{C}_+^k est une sous-variété de \mathcal{C}^k , dont l'espace tangent à l'origine est constitué des $\phi_1 \in T_0\mathcal{C}^k$, tels que dans la décomposition

$$\phi_1 = \sum_{\rho} \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle,$$

on ait

- si $V_{\rho} = V^{K, K+2}$, alors $w_1^1(-K+2, K+2) = 0$;
- si $V_{\rho} = V^{K, L}$ avec $K \leq L-4$, alors

$$w_1^1(-K, K+4) = w_1^2(-K, K+4) = w_2^1(-K, K+4) = 0.$$

Démonstration. Par le lemme 6.4, on sait que ϕ est remplissable si et seulement si la jauge de Coulomb $\varphi^*\phi$ est à coefficients de Fourier positifs ou nuls ; par conséquent, \mathcal{C}_+^k est le lieu des zéros de l'application $\phi \rightarrow \pi_{<0}\varphi^*\phi$ définie sur \mathcal{C} . Il est malaisé d'analyser directement l'image de cet opérateur, parce que la condition non linéaire $\bar{\partial}_H\phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0$ ne donne rien après projection par $\pi_{<0}$. Comme la carte Φ définie par (8.1) préserve la positivité des coefficients de Fourier par le corollaire 8.2, on va substituer à la variable ϕ la variable $\phi_1 = \Phi(\phi)$: pour l'action des contactomorphismes sur ϕ_1 , nous avons encore une jauge de Coulomb $J(\phi_1) = \varphi^*\phi_1$ (attention : Φ n'a pas de raison de préserver la jauge de Coulomb, donc cela donne sur ϕ une condition légèrement différente à la jauge de Coulomb précédemment utilisée), et \mathcal{C}_+^k apparaît comme le lieu des zéros de l'application

$$\pi_{<0} \circ J : T_0\mathcal{C}^k \longrightarrow (T_0\mathcal{C}^k)_{<0} \cap W;$$

cet opérateur est clairement submersif, donc \mathcal{C}_+^k est bien une variété, dont l'espace tangent à l'origine est le noyau de la linéarisation, déterminé par le théorème 7.1. \square

En particulier, on déduit la conséquence suivante.

Corollaire 8.4. *Il existe une famille de dimension infinie de structures CR intégrables, non remplissables, proches de la structure standard.*

D'autre part, si on note \mathcal{C}_-^k l'espace des structures CR qui sont remplissables de l'autre côté dans P^3 , on a une description de leur espace tangent similaire à celle du théorème 8.3, avec une condition sur les $V^{K,L}$ tel que $K > L$. On en déduit que \mathcal{C}_+^k et \mathcal{C}_-^k sont transverses, et que l'intersection $\mathcal{C}_+^k \cap \mathcal{C}_-^k$ est une sous-variété de dimension infinie dans \mathcal{C}_+^k et dans \mathcal{C}_-^k : on a donc le corollaire suivant.

Corollaire 8.5. *Il existe une famille de dimension infinie de structures CR remplissables, qui ne sont pas obtenues en déformant \mathcal{T} comme une hypersurface réelle dans P^3 .*

9 Espace des bords de métriques autoduales

Nous appliquons à présent les mêmes idées à la description des couples $[g, \mathcal{Q}]$ sur la sphère S^3 qui sont les bords de métriques autoduales sur la boule B^4 . Nous notons \mathcal{M} l'espace des métriques conformes sur S^3 , \mathcal{B} l'espace des couples $[g, \mathcal{Q}]$ sur S^3 ; pour la régularité, on notera \mathcal{M}^k et \mathcal{B}^k les objets qui deviennent de régularité \mathcal{H}^k une fois remontés à l'espace des twisteurs par la construction de la section 1.1. On considérera le groupe des difféomorphismes de S^3 comme un sous-groupe $\text{Diff}^{k+1}S^3 \subset \mathcal{G}^{k+1}$ du groupe des contactomorphismes de \mathcal{T} , et on considérera le groupe réduit $\text{Diff}_0^{k+1}S^3 \subset \mathcal{G}_0^{k+1}$ constitué des difféomorphismes qui fixent deux points sur l'espace des twisteurs, de sorte que

$$\text{Diff}^{k+1}S^3 / \text{Diff}_0^{k+1}S^3 = SO_{1,4},$$

le groupe conforme de S^3 (qui est aussi le groupe des automorphismes CR de \mathcal{T}).

9.1 Objets sur S^3 et sur \mathcal{T}

On peut voir la sphère S^3 comme un espace homogène sous son groupe d'isométries $SO_4 = Sp_1 Sp_1$:

$$S^3 = Sp_1 Sp_1 / SO_3,$$

où le $SO_3 \hookrightarrow Sp_1 Sp_1$ provient de l'inclusion diagonale $Sp_1 \hookrightarrow Sp_1 \times Sp_1$; de ce point de vue, on peut faire des décompositions des objets sur les représentations de $Sp_1 Sp_1$.

En particulier, les couples $[g, \mathcal{Q}]$ donnent lieu à la donnée infinitésimale de $(\dot{g}, \dot{\mathcal{Q}})$, où \dot{g} et $\dot{\mathcal{Q}}$ sont des formes quadratiques à trace nulle, donc représentées par des

$$\sum_{\rho} \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle, \quad v \otimes w \in [V_{\rho}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V_{\rho}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3);$$

ici, le crochet $[V_{\rho}]$ représente une forme réelle de V_{ρ} . Toutes les représentations de $Sp_1 Sp_1$ n'interviennent pas : en effet, si $V_{\rho} = \sigma^K \otimes \sigma^L$, la représentation diagonale de $Sp_1 Sp_1$ sur V_{ρ} est

$$\sigma^{K+L} \oplus \sigma^{K+L-2} \oplus \dots \sigma^{|K-L|}, \quad (9.1)$$

comme $\text{Sym}_0^2 \mathbf{C}^3 = \sigma^4$, seules interviennent les représentations avec

$$|K - L| = 0, 2 \text{ ou } 4;$$

puisque dans la décomposition (9.1) la représentation σ^4 n'intervient qu'une fois, l'espace $\text{Hom}_{SO_3}([V_{\rho}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3)$ est de dimension 1.

Les champs de vecteurs se décomposent de la même manière, en utilisant la représentation $\mathbf{R}^3 = [\sigma^2]$ de SO_3 : compte tenu à nouveau de la formule (9.1), les seules représentations qui interviennent sont à $|K - L| = 0$ ou 2 ; il est facile de voir que l'action infinitésimale des champs de vecteurs sur les classes conformes de métriques,

$$[V_{\rho}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V_{\rho}], \mathbf{R}^3) \longrightarrow [V_{\rho}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V_{\rho}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3),$$

est surjective pour $|K - L| = 0$ et 2 ; de là on déduit le lemme suivant.

Lemme 9.1. *Le quotient de l'espace des classes conformes de métriques par le groupe réduit des difféomorphismes de la sphère, $\mathcal{M}^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3$, est (près de la métrique standard) une variété, d'espace tangent à l'origine constitué des $\dot{g} \in \mathcal{H}^k$ tels que*

$$\dot{g} \in \sum_{K-L=\pm 4} [V^{K,L}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V^{K,L}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3).$$

Par la construction twistorielle de la section 1.1, la donnée de $[g, \mathcal{Q}]$ est équivalente à la donnée d'une structure CR intégrable ϕ sur \mathcal{T} , compatible à la structure réelle ($\tau^*\overline{\phi} = \phi$), et préservant les P^1 réels ; notons que ϕ préserve les P^1 si sa projection

$$\pi_{P^1}\phi \in \Omega^{0,1}P^1 \otimes (T^{1,0}/T^{1,0}P^1)$$

s'annule. Infinitésimalement, cela se traduit par le fait qu'est associé à $(\dot{g}, \dot{\mathcal{Q}})$ un tenseur ϕ_1 satisfaisant les équations

$$\overline{\partial}_H\phi_1 = 0, \quad \phi_1 \lrcorner F = 0, \quad \tau^*\overline{\phi_1} = \phi_1, \quad \pi_{P^1}\phi_1 = 0;$$

ces conditions ont été analysées dans les formules (7.8),(7.1),(7.6) et (7.2) ; il n'est pas difficile de voir que ces conditions ne peuvent être remplies que par des objets concentrés sur les représentations à $|K - L| \leq 4$; réciproquement, ces conditions imposent que ϕ_1 provienne d'un couple $(\dot{g}, \dot{\mathcal{Q}})$, mais nous n'aurons pas besoin d'écrire explicitement l'application $(\dot{g}, \dot{\mathcal{Q}}) \rightarrow \phi_1$.

9.2 Remplissage

Les problèmes de remplissage de $[g, \mathcal{Q}]$ et de la structure CR associée ϕ sont équivalents. Dans cette description, nous figeons la fibration legendrienne en P^1 ; cependant, il n'est pas possible de se restreindre aux contactomorphismes fixant cette fibration (c'est-à-dire provenant de difféomorphismes de S^3), car le contactomorphisme mettant ϕ en jauge de Coulomb n'a pas de raison de la préserver.

Pour surmonter cette difficulté, il est utile de représenter $[g, \mathcal{Q}]$ comme la donnée de (ϕ, α) , où ϕ est une structure CR intégrable, compatible à τ , et α un contactomorphisme, τ -invariant, tel que $\alpha^*\phi$ préserve la fibration en P^1 ; bien sûr, la donnée n'est définie qu'à contactomorphisme près. Maintenant, $[g, \mathcal{Q}]$ est remplissable s'il existe un représentant (ϕ, α) avec ϕ à coefficients de Fourier positifs ou nuls ; on peut toujours choisir pour ϕ la jauge de Coulomb.

Lemme 9.2. *L'opérateur $(\phi, f) \rightarrow (\overline{\partial}_H\phi, \pi_{P^1}(\phi - \overline{\partial}_H\# \overline{\partial}f))$ entre les espaces*

$$\{\phi \in \mathcal{H}^k, \phi \lrcorner F = 0\} \times \mathcal{H}^{k+2}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{H}^{k-1} \times \mathcal{H}^k$$

est surjectif. De plus, si $\overline{\partial}_H\phi$ est à coefficients de Fourier positifs ou nuls, alors ϕ peut être choisi à coefficients de Fourier positifs ou nuls.

Nous renvoyons la démonstration de ce lemme à la section 9.3.

Comme dans la section 8, on déduit du lemme que l'espace des $(\phi, \alpha) \in \mathcal{C}^k \times \mathcal{G}^{k+1}$, tels que $\alpha^* \phi$ préserve les P^1 , est une variété modelée sur les (ϕ_1, f_1) satisfaisant les conditions

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_H \phi_1 &= 0, \\ \phi_1 \lrcorner F &= 0, \\ \pi_{P^1}(\phi_1 - \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f_1) &= 0; \end{aligned} \tag{9.2}$$

surtout, on dispose d'une carte $(\phi, \alpha) \rightarrow (\phi_1, f_1)$ telle que la positivité des coefficients de Fourier de ϕ et ϕ_1 soit équivalente. Le quotient par l'action de \mathcal{G}^{k+1} est aussi une variété, modelée sur une tranche par rapport à l'action du groupe, c'est-à-dire les (ϕ_1, f_1) satisfaisant de plus la condition

$$\phi_1 \in W, \quad f_1 \perp \ker(\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}). \tag{9.3}$$

Jusqu'ici, on n'a rien montré, puisqu'on a simplement décrit localement l'espace \mathcal{B}^k des couples $[g, \mathcal{Q}]$ en termes des (ϕ, α) , mais avec l'avantage de pouvoir déterminer, sur la donnée infinitésimale (ϕ_1, f_1) si le (ϕ, α) correspondant est remplissable. Notons

$$\mathcal{B}_+^k \subset \mathcal{B}^k$$

l'espace des couples $[g, \mathcal{Q}]$ remplissables par une métrique autoduale.

Passons au quotient par le groupe des difféomorphismes de S^3 ; à nouveau, on voit que $\mathcal{B}^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3$ est une variété modelée sur les (ϕ_1, f_1) satisfaisant (9.2) et la condition

$$\phi_1 \in W, \quad f_1 \perp \mathfrak{Diff}^{k+1} S^3. \tag{9.4}$$

Maintenant, puisque ϕ_1 est en jauge de Coulomb, (ϕ_1, f_1) correspond à un couple $[g, \mathcal{Q}]$ remplissable si et seulement si ϕ_1 est à coefficients de Fourier positifs ou nuls : on en déduit que $\mathcal{B}_+^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3$ est une variété lisse modelée sur les (ϕ_1, f_1) satisfaisant (9.2) et (9.4), et tels que

$$\pi_{<0} \phi_1 = 0.$$

Il ne reste plus qu'à traduire ces conditions en termes de $[g, \mathcal{Q}]$. On déduit le résultat suivant.

Théorème 9.3. *L'espace $\mathcal{B}_+^k/\text{Diff}_0^{k+1}S^3$ des $[g, \mathcal{Q}]$ remplissables par une métrique autoduale sur B^4 , modulo le groupe réduit des difféomorphismes, est près de la métrique standard une variété, dont l'espace tangent en la métrique standard est constitué des $(\dot{g}, \dot{\mathcal{Q}}) \in \mathcal{H}^k$ tels que*

$$\begin{aligned}\dot{g} &\in \sum_{L \geq 0} [V^{L+4, L}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V^{L+4, L}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3), \\ \dot{\mathcal{Q}} &\in \sum_{(K=L, L+2, L+4, L \geq 0)} [V^{K, L}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V^{K, L}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3).\end{aligned}$$

Remarque 9.4. L'espace $\mathcal{B}_-^k/\text{Diff}_0^{k+1}S^3$ des $[g, \mathcal{Q}]$ remplissables par une métrique antiautoduale est, de manière similaire, une variété d'espace tangent les $(\dot{g}, \dot{\mathcal{Q}})$ tel que \dot{g} se décompose seulement sur les $V^{K, K+4}$ et $\dot{\mathcal{Q}}$ sur les $V^{K, K}, V^{K, K+2}$ et $V^{K, K+4}$; on observe donc que $\mathcal{B}_+^k/\text{Diff}_0^{k+1}S^3$ et $\mathcal{B}_-^k/\text{Diff}_0^{k+1}S^3$ sont transverses dans $\mathcal{B}^k/\text{Diff}_0^{k+1}S^3$, et l'intersection est une variété dont l'espace tangent est constitué des $\dot{\mathcal{Q}}$ qui se décomposent uniquement sur les $V^{K, K}$. Cela nous indique que cette intersection est en réalité constituée des déformations de S^3 comme sous-variété de \mathbf{R}^4 , et les métriques qui remplissent sont donc plates; en effet, ces déformations sont paramétrées par fn , où f est une fonction et n le vecteur normal à S^3 ; infinitésimalement, elles laissent la classe conforme invariante et ne modifient donc que la seconde forme fondamentale, ce qui correspond bien à notre description infinitésimale. Cela donne le théorème 0.5 comme conséquence du théorème 9.3.

Démonstration. Le tenseur $\psi_1 = \phi_1 - \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f_1$ représente une donnée infinitésimale $(\dot{g}, \dot{\mathcal{Q}})$, et il s'agit de voir dans quelles représentations il peut vivre, sachant que ϕ_1 a seulement des coefficients de Fourier positifs ou nuls. La réponse est fournie par le théorème 7.1 : pour $K \geq L$, on peut toujours, partant de ψ_1 , résoudre le problème

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f_1)_{<0} &= -(\psi_1)_{<0}, \\ (\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f_1)_0 &= -\pi_{\text{Im}} \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} (\psi_1)_0,\end{aligned}$$

et on aura bien la condition (9.4) si f_1 est orthogonal aux difféomorphismes infinitésimaux de S^3 , ce qu'on obtient en prenant ψ_1 lui-même orthogonal à l'action infinitésimale des difféomorphismes, c'est-à-dire \dot{g} satisfaisant la

condition du lemme 9.1. Pour $K = L - 2$ ou $L - 4$, il y a des obstructions à analyser : si $K = L - 2$, la condition $w_1^1(-K + 2, K + 2) = 0$ du théorème 7.1 revient à sélectionner un sous-espace de dimension 1 dans $\text{Hom}_{SO_3}([V^{K,L}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3 \oplus \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3)$ qui est de dimension 2 : nous connaissons déjà ce sous-espace, il s'agit des métriques dans l'image infinitésimale des difféomorphismes, et, comme ci-dessus, nous les éliminons au quotient. Si $K = L - 4$, les conditions $w_1^1(-K, K + 4) = w_1^2(-K, K + 4)$ du théorème 7.1 tuent complètement les deux degrés de liberté pour ψ_1 , donc cette composante doit être nulle. Finalement, on déduit qu'il ne reste que les composantes à $K \geq L$, d'où le théorème. \square

9.3 Démonstration du lemme 9.2

Une des difficultés de la démonstration du lemme est le fait que l'opérateur π_{P^1} ne commute pas à l'action de S^1 : l'assertion sur les coefficients de Fourier ne sera donc pas conséquence de la surjectivité de l'opérateur.

On va raisonner dans chaque représentation $V^{K,L}$, pour rendre le problème algébrique ; par abus de notation, on confondra ϕ et w tel que $\phi = \langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$, donc ϕ sera considéré comme élément de $\text{Hom}_{U_1}(V^{K,L}, \mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0})$; on fera la même chose pour les autres tenseurs en jeu.

Premier cas : $K \leq L - 6$. Alors l'opérateur

$$\phi \text{ tel que } \phi \lrcorner F = 0 \longrightarrow (\bar{\partial}_H \phi, \pi_{P^1} \phi) \quad (9.5)$$

est un isomorphisme ; l'inverse est obtenu en regardant la figure 3 : une solution de

$$\phi \lrcorner F = 0, \quad \bar{\partial}_H \phi = \psi, \quad \pi_{P^1} \phi = g,$$

est obtenue de proche en proche ; d'après (7.8), $\phi_1(-K, K + 4)$ est déterminé par $\psi(-K, K + 6)$; les équations $\phi \lrcorner F = 0$ et $\pi_{P^1} \phi = g$ se traduisent, d'après (7.2) et (7.1), par

$$\begin{aligned} \phi_1^1 + \phi_2^1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 &= g, \\ \phi_2^1 + \phi_1^2 &= 0; \end{aligned}$$

donc $\phi_2(-K, K + 4)$ est déterminé par $\phi_1(-K, K + 4)$ et $g(-K, K + 4)$; on poursuit alors le raisonnement de proche en proche pour $\phi(-K + 2, K + 2), \dots$

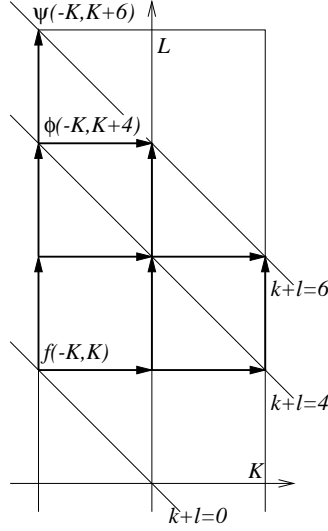


FIG. 3: cas $K \leq L - 6$

On déduit que l'opérateur du lemme 9.2 est bien surjectif; nous devons maintenant prouver l'énoncé concernant les coefficients de Fourier. Supposons que ψ n'ait que des coefficients de Fourier positifs ou nuls, et tentons de résoudre le problème de sorte que ϕ vérifie la même propriété. Commençons par résoudre (de proche en proche, comme ci-dessus pour ϕ),

$$\pi_{k<0}\pi_{P^1}(-\bar{\partial}_H\# \bar{\partial}f) = \pi_{k<0}g;$$

comme f est réelle, cela détermine complètement f , à l'exception du terme $f(0, 0)$ que nous prenons nul; notons

$$g' = g + \pi_{P^1}(-\bar{\partial}_H\# \bar{\partial}f),$$

de sorte que $g'(k, -k) = 0$ si $k < 0$, et résolvons le problème

$$\phi \lrcorner F = 0, \quad \bar{\partial}_H\phi = \psi, \quad \pi_{P^1}\phi = g';$$

j'affirme que ϕ a ses coefficients de Fourier négatifs triviaux. En effet, puisque la solution est calculée de proche en proche, il est clair que $\phi(k, -k + 4) = 0$ si $k < 0$; compte tenu des poids de l'action de S^1 calculés en (7.11) et de la positivité des coefficients, on sait que

$$\psi_{12}^1(0, 6) = \psi_{12}^2(0, 6) = \psi_{12}^1(2, 4) = 0;$$

testant à nouveau le diagramme permettant de calculer ϕ , nous déduisons tout d'abord

$$\phi_1^1(0, 4) = \phi_1^2(0, 4) = \phi_2^1(0, 4) = 0;$$

finalemt, dans l'équation $\bar{\partial}\phi = \psi$, le terme $\psi_{12}^1(2, 4)$ est déterminé par $\phi_2^1(0, 4)$ et $\phi_1^1(2, 2)$, donc son annulation implique

$$\phi_1^1(2, 2) = 0$$

qui était le dernier terme strictement négatif à annuler.

Second cas : $K \geq L - 4$. Dans ce cas, le noyau de l'opérateur (9.5) est constitué des ϕ tels que

$$\phi \lrcorner F = 0, \quad \bar{\partial}_H \phi = 0, \quad \pi_{P^1} \phi = 0, \quad (9.6)$$

qui correspondent exactement aux données infinitésimales (\dot{g}, \dot{Q}) dans \mathcal{B} ; ce noyau est donc nul pour $K > L + 4$, et de dimension 2 pour $L - 4 \leq K \leq L + 4$; un décompte de dimension nous indique alors que l'opérateur (9.5) est surjectif.

Reste à montrer l'assertion sur les coefficients de Fourier positifs : on utilise maintenant que le noyau de $(\phi, f) \rightarrow (\bar{\partial}_H \phi, \pi_{P^1}(\phi - \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f))$ contient les

$$(\phi = \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f, f). \quad (9.7)$$

Si ψ est donnée, à coefficients de Fourier positifs ou nuls, prenons une solution ϕ de

$$\phi \lrcorner F = 0, \quad \bar{\partial}_H \phi = \psi, \quad \pi_{P^1} \phi = g,$$

on va la modifier par un élément de type (9.7) de sorte de tuer tous les coefficients strictement négatifs. Les premières équations commutent à l'action de S^1 , ce qui implique

$$\phi_- \lrcorner F = 0, \quad \bar{\partial}_H \phi_- = 0.$$

Dans le cas $K \geq L$, par le théorème 7.1, il existe une fonction réelle f telle que $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f_- = -\phi_-$; alors le couple $(\phi + \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f, f)$ est solution des équations voulues, et $\phi + \bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f$ est à coefficients de Fourier positifs ou nuls.

Dans les cas $K = L - 2$ et $K = L - 4$, on peut appliquer le même raisonnement, pourvu qu'on se ramène aux conditions prescrites par le théorème

7.1. Pour cela, notons qu'un ϕ satisfaisant (9.6) est entièrement déterminé par les deux coefficients $\phi_1^1(-K, K+4)$ et $\phi_1^2(-K, K+4)$, tous les autres coefficients s'en déduisant de proche en proche ; cela signifie qu'étant donnée une solution ϕ de

$$\phi \lrcorner F = 0, \quad \bar{\partial}_H \phi = \psi, \quad \pi_{P^1} \phi = g,$$

on peut la modifier par un élément satisfaisant (9.6) de sorte que $\phi_1(-K, K+4) = 0$ (ce qui implique aussi $\phi_2^1(-K, K+4) = 0$) ; les conditions d'application du théorème 7.1 sont ainsi établies. \square

10 Espace des infinis conformes de métriques autoduales d'Einstein

Notons

$$\mathcal{M}_+^k = \mathcal{B}_+^k \cap \mathcal{M}^k$$

l'espace des métriques conformes sur S^3 qui sont les infinis conformes de métriques d'Einstein autoduales sur B^4 . Le but de cette section est de montrer que \mathcal{M}_+^k est une sous-variété de \mathcal{B}_+^k : il en résultera que l'espace tangent en la métrique ronde est constitué des \dot{g} satisfaisant les conditions du théorème 9.3, ce qui fournit le théorème suivant.

Théorème 10.1. *L'espace $\mathcal{M}_+^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3$ des métriques conformes $[g]$, infinis conformes de métriques autoduales d'Einstein sur B^4 , modulo le groupe réduit des difféomorphismes, est près de la métrique standard une variété d'espace tangent constitué des $\dot{g} \in \mathcal{H}^k$ tels que*

$$\dot{g} \in \sum_{L \geq 0} [V^{L+4, L}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V^{L+4, L}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3).$$

Remarque 10.2. Bien entendu, l'espace tangent à l'espace $\mathcal{M}_-^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3$ des infinis conformes de métriques antiautoduales d'Einstein est

$$\sum_{K \geq 0} [V^{K, K+4}] \otimes \text{Hom}_{SO_3}([V^{K, K+4}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3),$$

de sorte que, en vue du lemme 9.1, on a bien en la métrique ronde la décomposition de l'espace tangent

$$T(\mathcal{M}^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3) = T(\mathcal{M}_+^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3) \oplus T(\mathcal{M}_-^k / \text{Diff}_0^{k+1} S^3),$$

ce qui démontre le théorème 0.6.

Remarque 10.3. L'espace $\text{Hom}_{SO_3}([V^{K,K+4}], \text{Sym}_0^2 \mathbf{R}^3)$ est de dimension 1, comme on l'a vu dans la section 9.1 ; la première composante de l'espace tangent, $[V^{4,0}]$, de dimension 5, a une interprétation simple : il s'agit des métriques invariantes à droite sur S^3 , et les métriques d'Einstein autoduales correspondantes ont été explicitées par Hitchin [Hit95] ; la seconde composante, $[V^{5,1}]$, de dimension 12, n'a plus d'interprétation aussi claire.

Le théorème 10.1 est loin d'être une simple conséquence du théorème 9.3 : ce dernier fournit en effet un algorithme fabriquant à partir d'une donnée infinitésimale (\dot{g}, \dot{Q}) un couple $[g, Q]$ qui est le bord d'une métrique autoduale, mais il n'est pas clair que $\dot{Q} = 0$ implique $Q = 0$. De plus, il ne semble pas y avoir de raison a priori pour que l'intersection de \mathcal{B}_+^k et de \mathcal{M}^k soit transverse. Nous allons employer ici une méthode différente, étudiant les déformations d'une structure CR avec une structure de contact holomorphe ; on va donc oublier le contactomorphisme et la fibration en P^1 et montrer que la structure est assez riche pour permettre de les récupérer a posteriori.

10.1 Théorie de la déformation

Nous cherchons donc une déformation ϕ de la structure CR, et une forme de contact holomorphe ϖ^c à valeurs dans $L = \mathcal{O}(0, 2)$; comme dans la section 3.2, puisque ϖ^c est une petite déformation de η^c , on la cherche sous la forme

$$\varpi^c = (\eta^c + \xi) - \phi \lrcorner (\eta^c + \xi), \quad \xi \in \Omega' \otimes L, \quad \xi|_{T^{1,0}P_2^1} = 0,$$

et satisfaisant l'équation (3.5), c'est-à-dire

$$\bar{\partial} \varpi^c + \phi \lrcorner \partial \varpi^c + \alpha \wedge \varpi^c = 0$$

pour une $(0,1)$ -forme α . Cette équation fait intervenir une connexion sur L , que nous choisissons égale à la connexion provenant de la connexion triviale

sur $\mathcal{O}_{P_1^1}$ et de la connexion standard sur $\mathcal{O}_{P_2^1}(2)$, de sorte que sa courbure est égale à

$$F^L = -2i\omega_2.$$

Si on a une solution (ϕ, ϖ^c) des équations, alors L , identifié au quotient $T'_\phi / \ker \varpi^c$, acquiert une structure holomorphe, dont l'opérateur $\bar{\partial}$ s'écrit

$$\bar{\partial} + \phi \lrcorner \partial + \alpha;$$

l'intégrabilité de cette structure holomorphe se traduit par l'équation

$$\bar{\partial}\alpha + \phi \lrcorner (F^L + \partial\alpha) = 0. \quad (10.1)$$

Rappelons d'autre part que, d'après (3.6), les équations à satisfaire par (ϕ, ϖ^c) sont, en plus de la condition algébrique $\phi \lrcorner F = 0$,

$$\bar{\partial}_H \phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0, \quad (10.2)$$

$$\bar{\partial}\xi - \partial'(\phi \lrcorner (\eta^c + \xi)) + \phi \lrcorner \partial'(\eta^c + \xi) + \alpha(\eta^c + \xi) = 0. \quad (10.3)$$

Les trois équations précédentes peuvent s'écrire $P(\phi, \alpha, \xi) + Q(\phi, \alpha, \xi) = 0$, où P est la partie linéaire des trois équations précédentes, donnée par $P(\phi, \alpha, \xi) = (\psi, \beta, \zeta)$, avec

$$\begin{aligned} \psi &= \bar{\partial}_H \phi \\ \beta &= \bar{\partial}\alpha + \phi \lrcorner F^L \\ \zeta &= \bar{\partial}\xi - \partial'(\phi \lrcorner \eta^c) + \phi \lrcorner d\eta^c + \alpha\eta^c \end{aligned} \quad (10.4)$$

et Q est la partie quadratique restante.

D'après la démonstration du théorème 9.3, on sait que, étant donnée une métrique infinitésimale \dot{g} satisfaisant la condition du théorème 10.1, il existe un contactomorphisme infinitésimal de l'espace des twisteurs \mathcal{T} qui envoie la structure CR infinitésimale sur un tenseur ϕ_1 à coefficients de Fourier positifs ; bien entendu, d'après le théorème 3.4, le contactomorphisme infinitésimal envoie la structure de contact holomorphe sur un ξ_1 à coefficients positifs si bien qu'on se retrouve avec un triplet $(\phi_1, \xi_1, \alpha_1)$, à coefficients de Fourier positifs, solution des équations infinitésimales

$$P(\phi_1, \alpha_1, \xi_1) = 0.$$

On va maintenant montrer qu'à partir d'une telle donnée infinitésimale, on peut produire une solution, à coefficients de Fourier positifs, des équations (10.1), (10.2) et (10.3). L'étape essentielle est le lemme suivant.

Lemme 10.4. *L'opérateur P , défini sur les triplets*

$$(\phi, \alpha, \xi) \in \mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0}) \times \mathcal{H}^{k+1}(\Omega^{0,1}) \times \mathcal{H}^{k-1}(\Omega')$$

tels que $\phi \lrcorner F = 0$ et $\xi|_{T^{1,0}P_2^1} = 0$, a exactement pour image les triplets

$$(\psi, \beta, \zeta) \in \mathcal{H}^{k-1}(\Omega^{0,2} \otimes T^{1,0}) \times \mathcal{H}^k(\Omega^{0,2}) \times \mathcal{H}^{k-2}(\tilde{\Omega}^{1,1}),$$

satisfaisant l'équation

$$\bar{\partial}\zeta = (\partial'\psi) \lrcorner \eta^c + \beta \wedge \eta^c. \quad (10.5)$$

Ce lemme est a priori surprenant, car on sait qu'avec une forme de Levi de signature (1,1), les H^1 sont de dimension infinie, donc on ne s'attend pas à pouvoir atteindre tous les ζ . La démonstration sera faite dans la section 10.2.

Revenons à notre théorie de la déformation : on est dans le cadre de la théorie standard de déformation, et le lemme signifie que le H^2 du complexe de déformation est nul, autrement dit il n'y a pas d'obstruction pour produire une solution (ϕ, α, ξ) du système d'équations (10.1), (10.2) et (10.3) à partir d'une donnée infinitésimale $(\phi_1, \alpha_1, \xi_1)$. Compte tenu de la forme des équations (elles préservent la positivité des coefficients de Fourier), la solution (ϕ, α, ξ) est à coefficients positifs en même temps que $(\phi_1, \alpha_1, \xi_1)$: on a ainsi produit une structure CR et une forme de contact holomorphe qui s'étendent à l'intérieur. Si la donnée initiale est compatible à la structure réelle, il en est de même pour (ϕ, α, ξ) .

Le seul point à traiter concerne la fibration en P^1 que nous avons a priori perdue par cette méthode. La méthode la plus naturelle pour la récupérer consiste à améliorer la théorie de la déformation précédente pour assurer que la forme de contact ϖ^c satisfait de plus $F \wedge \varpi^c \wedge \overline{\varpi^c} = 0$; en effet, si cette condition est satisfaite, il n'est pas difficile de voir que

$$\operatorname{Re}(\ker(\varpi^c) \cap T_\phi^{1,0} + \overline{\ker(\varpi^c) \cap T_\phi^{1,0}})$$

est une distribution intégrable et legendrienne ; par le théorème de stabilité de Reeb, une perturbation d'un feuilletage en sphères S^2 demeure une fibration en sphères S^2 , donc on obtient une fibration legendrienne en sphères S^2 , qui est nécessairement isomorphe à la fibration initiale par un contactomorphisme.

Cependant, au lieu de revenir sur la théorie de la déformation, nous pouvons utiliser un argument plus rapide : l'extension à l'intérieur de (ϕ, α, ξ) définit un domaine complexe D muni d'une forme de contact holomorphe ϖ^c ; on peut aussi élargir légèrement ce domaine, ainsi que la forme de contact holomorphe, de l'autre côté de son bord ∂D , pour obtenir un domaine légèrement plus grand D' ; à présent, la fibration initiale en courbes rationnelles réelles à fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$, par le théorème de Kodaira, peut elle aussi être perturbée, et cette famille de P^1 est donc l'espace des paramètres d'une variété autoduale d'Einstein X , dont le bord ∂X est caractérisé comme la famille des P^1 réels qui sont tangents à la distribution de contact holomorphe ; LeBrun [LeB91, proposition 1] a démontré cette équation est transverse, ce qui signifie que le bord est toujours lisse, et que l'on peut le trouver en déformant le bord initial de la métrique hyperbolique réelle. Cette construction permet donc de récupérer à partir de (ϕ, α, ξ) le bord ∂X , qui porte la métrique conforme que nous voulions construire. Cela achève la démonstration du théorème 10.1. \square

10.2 Démonstration du lemme 10.4

On commence par se débarrasser de ψ et de ζ par le lemme suivant.

Lemme 10.5. *L'opérateur $(\phi, \alpha) \rightarrow (\bar{\partial}_H \phi, \bar{\partial} \alpha + \phi \lrcorner F^L)$, défini sur les (ϕ, α) tels que $\phi \lrcorner F = 0$, est surjectif.*

Démonstration. L'opérateur $\phi \rightarrow \bar{\partial}_H \phi$ est surjectif par le lemme 9.2, donc il suffit de vérifier que $\alpha \rightarrow \bar{\partial} \alpha$ est surjectif, c'est-à-dire de montrer que $H^2(\mathcal{O}) = 0$. On peut décomposer cette cohomologie suivant le poids k de l'action de S^1 comme dans la démonstration du lemme 3.1, et on déduit

$$\begin{aligned} H^2(\mathcal{O}) &= \oplus_k H^2(P_1^1 \times P_2^1, \mathcal{O}(k, -k)) \\ &= \oplus_k H^1(P_1^1, \mathcal{O}(k)) \otimes H^1(P_2^1, \mathcal{O}(-k)) = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

□

De ce lemme, on déduit que pour calculer l'image de l'opérateur P défini par (10.4), on peut se contenter de regarder l'opérateur $(\phi, \alpha, \xi) \rightarrow \zeta$.

Commençons par étudier le simple problème de cohomologie $\zeta = \bar{\partial}\xi$. Rappelons que ξ est une section de

$$\Omega' \otimes L = (\mathbf{C}\eta \oplus \Omega^{1,0}) \otimes L,$$

et l'opérateur $\bar{\partial}$ de Ω' a été calculé dans la formule (3.3), à savoir, dans la décomposition précédente de Ω' ,

$$\bar{\partial}(\xi^0\eta \oplus \xi^{1,0}) = \bar{\partial}\xi^0 \wedge \eta \oplus (\bar{\partial}\xi^{1,0} + \xi^0(\omega_1 - \omega_2));$$

ici, ξ^0 est une section de $L = \mathcal{O}(0, 2)$; à nouveau, la cohomologie se décompose suivant les poids k de l'action de S^1 et on notera $H_{\geq 0}$ la cohomologie selon les poids positifs.

On aura également recours, comme dans la section 7, aux décompositions suivant les représentations de Sp_1Sp_1 ; de ce point de vue, le fibré L apparaît comme le fibré homogène associé à la représentation ℓ de U_1 avec poids 2; rappelons également que l'on a décomposé $\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{m}$, et on notera $\mathfrak{m}^{1,0} = \mathfrak{m}_1^{1,0} \oplus \mathfrak{m}_2^{1,0}$ la décomposition des formes suivant les deux P^1 .

Lemme 10.6. *On a les égalités*

$$\begin{aligned} H_{\geq 0}^1(L) &= \oplus_{k \geq 4} H^0(P_1^1, \mathcal{O}(k)) \otimes H^1(P_2^1, \mathcal{O}(-k+2)), \\ H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_1^1}^1 \otimes L) &= H^1(P_1^1, \Omega_{P_1^1}^1) \otimes H^0(P_2^1, L) \oplus H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_1^1}^1 \otimes L)_0, \\ H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_1^1}^1 \otimes L)_0 &= \oplus_{k \geq 4} H^0(P_1^1, \mathcal{O}(k-2)) \otimes H^1(P_2^1, \mathcal{O}(-k+2)), \\ H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_2^1}^1 \otimes L) &= \oplus_{k \geq 2} H^0(P_1^1, \mathcal{O}(k)) \otimes H^1(P_2^1, \mathcal{O}(-k)). \end{aligned}$$

Dans la décomposition suivant les représentations de Sp_1Sp_1 , la cohomologie $H_{\geq 0}^1(L)$ est concentrée sur les représentations $V^{K,L}$ avec $K = L + 4$, et est représentée par les $\langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$ avec

$$v \otimes w \in V^{K,L} \otimes \text{Hom}(V(K, -L), \mathfrak{m}_2^{0,1} \otimes \ell);$$

la cohomologie $H_{\geq 0}^1(\Omega^1 \otimes L)_0$ est concentrée sur les représentations $V^{K,L}$ avec $K = L + 2$, et est représentée par les $\langle w, \rho(g^{-1})v \rangle$ avec

$$v \otimes w \in V^{K,L} \otimes \text{Hom}(V(K, -L), \mathfrak{m}^{1,0} \otimes \mathfrak{m}_2^{0,1} \otimes \ell).$$

Démonstration. Le calcul des H^1 , décomposés suivant les poids de l'action de S^1 , est similaire à celui effectué en (10.6), sachant que $L = \mathcal{O}(0, 2)$. Le point ici est l'assertion sur les représentations (on remarquera que les dimensions des espaces de représentations indiqués coïncident bien avec les dimensions des H^1) : le résultat se lit sur les figures, comme dans la section 7 (voir aussi la figure 4 ci-dessous). \square

Finissons à présent la démonstration du lemme 10.4 : étant donné $\zeta \in \Omega^{0,1} \otimes \Omega' \otimes L$, tel que $\bar{\partial}\zeta = 0$, on cherche ϕ, ξ (tel que $\xi|_{T_{P_2}^{1,0}} = 0$) et α tels que

$$\zeta = \bar{\partial}\xi - \partial'(\phi \lrcorner \eta^c) + \phi \lrcorner d\eta^c + \alpha \wedge \eta^c;$$

on peut trouver ξ et $\alpha = \bar{\partial}f$ qui tuent toute la partie de ζ orthogonale à la cohomologie calculée dans le lemme 10.6, il nous reste à utiliser ϕ et la partie cohomologie de α pour tuer le reste.

Commençons par noter que la composante $H^1(P_1^1, \Omega_{P_1}^1) \otimes H^0(P_2^1, L)$ obtenue dans le lemme est représentée par les $\sigma\omega_1$, où $\sigma \in H^0(P_2^1, L)$; comme

$$\bar{\partial}(\sigma\eta) = \sigma(\omega_1 - \omega_2), \quad (10.7)$$

on voit que quitte à modifier ζ par $\sigma\omega_2$ (qui appartient à l'espace $H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_2}^1 \otimes L)$ pour le poids $k = 2$) on peut supposer que cette composante s'annule.

Une des conséquences importantes du lemme 10.6 est que les problèmes de cohomologie pour les composantes de ζ sur $\Omega^{0,1} \wedge \eta \otimes L$ et $\Omega^{1,1} \otimes L$ sont complètement déconnectés, puisque les cohomologies correspondantes apparaissent dans des représentations différentes. On peut donc traiter séparément ces deux problèmes : ils sont traités dans les deux lemmes suivants, ce qui achève la démonstration du lemme 10.4. \square

Le premier lemme concerne les représentations à $K = L + 4$.

Lemme 10.7. *L'image de l'application $\phi \rightarrow -\partial'(\phi \lrcorner \eta^c) + \phi \lrcorner d\eta^c$, définie sur les $\phi \in \Omega_{P_2}^{0,1} \otimes T_{P_2}^{1,0}$ satisfaisant $\bar{\partial}_H\phi = 0$, contient la cohomologie $H_{\geq 0}^1(L)$.*

Démonstration. On remarquera que les conditions algébriques $\phi \lrcorner F = 0$ et $\phi \lrcorner F^L = 0$ sont une conséquence de $\phi \in \Omega_{P_2}^{0,1} \otimes T_{P_2}^{1,0}$. On a vu dans le lemme 10.6 qu'un élément ζ^0 de $H^1(L)$ peut se représenter par des $v \otimes w$ avec $w \in \text{Hom}(V(K, -K+4), \mathfrak{m}_2^{0,1} \otimes \ell)$; cela nous amène à chercher un ϕ vérifiant

la même propriété : plus précisément, soit $\phi \in \Omega_{P_2^1}^{0,1} \otimes T_{P_2^1}^{1,0}$, dans la composante à poids K de l'action de S^1 , alors on calcule

$$R_{\lrcorner}(-\partial'(\phi \lrcorner \eta^c) + \phi \lrcorner d\eta^c) = -iK\phi \lrcorner \eta^c; \quad (10.8)$$

étant donné $\zeta^0 \in \Omega_{P_2^1}^{0,1} \otimes L$ tel que $\bar{\partial}\zeta^0 = 0$, on définit $\phi \in \Omega_{P_2^1}^{0,1} \otimes T_{P_2^1}^{1,0}$ par

$$-iK\phi \lrcorner \eta^c = \zeta^0,$$

alors on a bien $\bar{\partial}_H\phi = 0$, et

$$-\partial'(\phi \lrcorner \eta^c) + \phi \lrcorner d\eta^c = \zeta^0\eta + \zeta^{1,1};$$

la composante $\zeta^{1,1}$ sur $\Omega^{1,1} \otimes L$ est nulle en cohomologie, puisque, d'après le lemme 10.6, celle-ci est concentrée sur les représentations à $K = L + 2$. \square

Le second lemme concerne les représentations à $K = L + 2$.

Lemme 10.8. *L'image de l'application $(\phi, \alpha) \rightarrow -\partial'(\phi \lrcorner \eta^c) + \phi \lrcorner d\eta^c + \alpha\eta^c$, définie sur les couples (ϕ, α) tels que $\phi \lrcorner F = 0$, $\phi \lrcorner F^L = 0$, $\bar{\partial}_H\phi = 0$, et $\bar{\partial}\alpha + \phi \lrcorner F^L = 0$, contient $H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_1^1}^1 \otimes L)_0$ et $H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_2^1}^1 \otimes L)$.*

Démonstration. Ce lemme est légèrement plus difficile à démontrer que le précédent. Nous raisonnons de manière algébrique, comme dans la section 7, dans la représentation $V^{K,L}$ avec $K = L + 2$; par abus de notation, nous identifions ϕ avec $\langle \phi, \rho(g^{-1})v \rangle$ où $v \in V^{K,L}$ et on prend $\phi \in \text{Hom}(V(K, -K + 4), \mathfrak{m}^{0,1} \otimes \mathfrak{m}_{1,0})$ de la forme (comme dans le lemme précédent)

$$\phi = \phi_2^2 e^{\bar{2}} e_2;$$

un tel ϕ vérifie automatiquement $\bar{\partial}_H\phi = 0$ car $\phi_2^2 \circ \rho_*(Y_1) = 0$ si ϕ_2^2 est concentré sur $V(K, -K + 4)$, voir la figure 4; la forme homogène η^c s'écrit algébriquement $\eta^c = (e^1 - e^2)\sigma \in \mathfrak{m}^{1,0} \otimes \ell$, où $\sigma \in \ell$ est un vecteur de base fixé; par conséquent, on a

$$-\phi \lrcorner \eta^c = \phi_2^2 e^{\bar{2}} \sigma;$$

d'un autre côté, remarquons que si $\xi^0 \in \text{Hom}(V(K, -K + 2), \mathbf{C})$, alors $\bar{\partial}(\xi^0\sigma) = \xi^0 \circ \rho_*(Y_2)e^{\bar{2}}\sigma$ (il n'y a pas de dérivée sur $e^{\bar{1}}$ car $\xi^0 \circ \rho_*(Y_1) = 0$

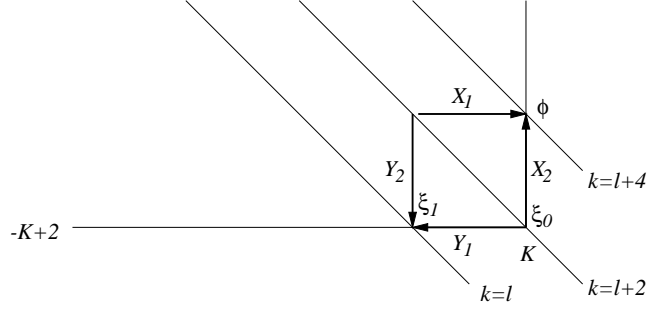


FIG. 4: la cohomologie est concentrée en $(K, -K + 2)$

pour ξ^0 concentré sur $V(K, -K + 2)$; compte tenu de la relation $-Y_2 X_2 = [X_2, Y_2] = H_2 = -K + 4$ sur $V(K, -K + 4)$, on déduit qu'en posant

$$\xi^0 = -i \frac{K}{K-4} \phi_2^2 \circ \rho_*(X_2),$$

on obtient

$$R_{\perp}(\bar{\partial} \xi_0 \sigma + K \phi_{\perp} \eta^c) = 0,$$

c'est-à-dire que, d'après (10.8), l'image de $(\phi, \xi^0 \sigma)$ est concentrée sur $\Omega^{1,1} \otimes L$; cette image est d'ailleurs égale à

$$-\partial(\phi_{\perp} \eta^c) + \xi^0(\omega_1 - \omega_2),$$

soit algébriquement

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{K}{K-4}\right) \phi_2^2 \circ \rho_*(X_2) e^2 \wedge e^{\bar{2}} \sigma \\ & + \left(\phi_2^2 \circ \rho_*(X_1) e^1 \wedge e^{\bar{2}} \sigma + \frac{K}{K-4} \phi_2^2 \circ \rho_*(X_2) e^1 \wedge e^{\bar{1}} \sigma \right); \end{aligned}$$

le second morceau de cette somme est une $(0,1)$ -forme $\bar{\partial}$ -fermée à valeurs dans $\Omega_{P_1}^{1,0} \otimes L$, mais $H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_1}^{1,0} \otimes L)$ étant concentré sur $\text{Hom}(V(K, -K+2), \mathfrak{m}^{0,1} \otimes e^1)$, elle est $\bar{\partial}$ -exacte (ce fait se lit d'ailleurs immédiatement sur la figure 4), si bien qu'on obtient finalement

$$\left(1 - \frac{K}{K-4}\right) \phi_2^2 \circ \rho_*(X_2) e^2 \wedge e^{\bar{2}} \sigma + \bar{\partial} \xi^1,$$

où ξ^1 est concentré sur $V(K - 2, -K + 2)$; on en déduit que toute la cohomologie $H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_2^1}^1 \otimes L)$ peut être tuée par le choix de (ϕ, ξ) comme ci-dessus; comme on dispose également de $\alpha\eta^c$ tel que $\bar{\partial}\alpha = 0$, de sorte que

$$\alpha \in H_{\geq 0}^1(\mathcal{O}) = \oplus_{k \geq 2} H^0(P_1^1, \mathcal{O}(k)) \otimes H^1(P_2^1, \mathcal{O}(-k)),$$

on voit immédiatement que tout $H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_1^1}^1 \otimes L)_0 \oplus H_{\geq 0}^1(\Omega_{P_2^1}^1 \otimes L)$ est atteint. \square

11 Métriques quaternion-kählériennes

Nous passons maintenant au cas de la dimension supérieure.

11.1 Structures de contact quaternioniennes

Rappelons brièvement qu'une structure de contact quaternionienne sur une variété X^{4m-1} est l'analogue quaternionien d'une structure CR : il s'agit d'une distribution $H \subset TX$ de codimension 3, munie d'une structure quaternionienne conforme (une $CSp_{m-1}Sp_1$ -structure), c'est-à-dire d'une métrique γ et de trois structures presque complexes I_1, I_2, I_3 satisfaisant les relations de commutation des quaternions ($I_1 I_2 I_3 = -1$) et préservant la métrique; les structures complexes ne sont définies qu'à l'action près de Sp_1 , et la métrique à un facteur conforme près. De plus, on demande la compatibilité suivante avec la distribution H : localement, il existe une 1-forme $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ à valeurs dans \mathbf{R}^3 , telle que $H = \ker \eta$ et

$$d\eta_i(X, Y) = \gamma(I_i X, Y).$$

Il est démontré dans [Biq00] (voir aussi le survey [Biq99]) qu'en dimension $4m - 1 \geq 11$, une telle donnée admet un espace de twisteurs \mathcal{T}^{4m+1} qui est une variété CR intégrable munie d'une structure de contact holomorphe; en dimension 7, l'existence de l'espace des twisteurs n'est pas automatique—c'est une condition d'intégrabilité à imposer à la structure (similaire à la condition d'intégrabilité des structures CR). L'exemple standard est celui de

la sphère S^{4m-1} , dont la structure de contact quaternionienne est fourni par les espaces horizontaux de la fibration de Hopf

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & S^{4m-1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbf{H}P^{m-1} \end{array} .$$

Le cas de l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbf{H}H^m$ est explicite, et similaire au cas $\mathbf{H}H^1 = \mathbf{R}H^4$ expliquée dans la section 1.2 : l'espace des twisteurs de l'espace projectif quaternionien $\mathbf{H}P^m$ est P^{2m+1} , avec projection twistorielle

$$p([z^1 : z^2 : \dots : z^{2m+1} : z^{2m+2}]) = [z^1 + jz^2 : \dots : z^{2m+1} + jz^{2m+2}],$$

et l'espace hyperbolique quaternionien se réalise comme le domaine

$$\mathbf{H}H^m = \{|q^1|^2 + \dots + |q^m|^2 < |q^{m+1}|^2\} \subset \mathbf{H}P^m,$$

avec pour espace des twisteurs

$$\mathcal{N} = \{|z^1|^2 + \dots + |z^{2m}|^2 < |z^{2m+1}|^2 + |z^{2m+2}|^2\} \subset P^{2m+1},$$

muni de la structure réelle standard et de la structure de contact holomorphe

$$\begin{aligned} \eta^c = & (z^1 dz^2 - z^2 dz^1) + \dots + (z^{2m-1} dz^{2m} - z^{2m} dz^{2m-1}) \\ & - (z^{2m+1} dz^{2m+2} - z^{2m+2} dz^{2m+1}); \end{aligned}$$

le bord $\mathcal{T} = \partial\mathcal{N}$ apparaît à nouveau comme le fibré $\mathcal{O}(-1, 1)$ sur $P^{2m-1} \times P^1$, avec courbure

$$iF = \omega_{P^{2m-1}} - \omega_{P^1}.$$

11.2 Démonstration du théorème 0.8

Le problème d'extension des structures de contact quaternioniennes (en dimension 7, on doit supposer que l'espace des twisteurs existe) est ramené par la construction twistorielle au problème de prolonger dans \mathcal{N} la déformation de la structure CR et de la structure de contact holomorphe de \mathcal{T} .

Pour réaliser ce remplissage, on veut montrer que toute structure CR sur \mathcal{T} , proche de la structure standard, peut être mise à coefficients de Fourier positifs après action d'un contactomorphisme. Comme dans la section 5, on a un groupe bien défini de contactomorphismes qui agit sur l'espace des structures CR. On analyse l'action infinitésimale.

Lemme 11.1. *Pour $m > 1$, l'image de l'opérateur $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ agissant sur les fonctions complexes de classe \mathcal{H}^{k+2} à coefficients de Fourier strictement négatifs est l'espace des $\phi \in \mathcal{H}^k(\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0})$, à coefficients de Fourier strictement négatifs, satisfaisant $\bar{\partial}_H \phi = 0$ et $\phi \lrcorner F = 0$.*

Démonstration. Soit un entier $k > 0$, le problème $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial} f = \phi$ en poids $-k$ est équivalent au problème $\bar{\partial} \# \bar{\partial} f = \phi$, où maintenant sur $P^{2m-1} \times P^1$ on voit f comme une section de $\mathcal{O}(-k, k)$ et ϕ de $\Omega^{0,1} \otimes T^{1,0} \otimes \mathcal{O}(-k, k)$. Or on a l'annulation suivante de la cohomologie, pour $m > 1$ et $k > 0$:

$$H^1(P^{2m-1} \times P^1, T^{1,0} \otimes \mathcal{O}(-k, k)) = H^1(P^{2m-1} \times P^1, \mathcal{O}(-k, k)) = 0,$$

qui se déduit immédiatement de l'annulation bien connue, pour $m > 1$,

$$H^1(P^{2m-1}, T^{1,0} \otimes \mathcal{O}(\ell)) = 0.$$

Déduisons-en le lemme : l'annulation du premier H^1 indique que l'on peut résoudre le problème $\bar{\partial} X = \phi$; alors

$$\bar{\partial}(\flat X) = \bar{\partial}(X \lrcorner F) = \phi \lrcorner F = 0,$$

donc, par l'annulation du second H^1 , on peut résoudre $\bar{\partial} f = \flat X$, donc $\bar{\partial} \# \bar{\partial} f = \phi$. \square

Quand on se restreint aux fonctions réelles, le lemme signifie que le supplémentaire W de l'image de $\bar{\partial}_H \# \bar{\partial}$ défini dans le lemme 6.4 est constitué de tenseurs ϕ qui n'ont que des coefficients de Fourier positifs ; comme dans le corollaire 6.3, une petite déformation CR de ϕ peut être mise en jauge de Coulomb $\varphi^* \phi \in W$, donc à coefficients de Fourier positifs, et par conséquent, comme dans le lemme 2.2, est le bord d'une déformation complexe de \mathcal{N} .

Notons qu'on obtient probablement une autre démonstration de ce fait en appliquant le théorème d'extension de Kiremidjian [Kir79], à condition

de montrer l'annulation de $H_c^2(\mathcal{N}, T^{1,0})$. La démonstration utilisant le lemme 11.1 est plutôt plus directe, en particulier elle évite le recours au théorème de Nash-Moser.

La démonstration du théorème 3.4 reste également valable dans notre cas, et donne l'extension de la structure de contact holomorphe. Le théorème 0.8 en résulte. \square

Remarque 11.2. Le lecteur attentif aura noté que la méthode utilisée dans le lemme 11.1 donne une voie différente pour calculer, en dimension 5, les obstructions obtenues dans la section 7. J'ai préféré le calcul par les décompositions harmoniques, plus complet : en particulier, les calculs de la section 10.2 sont immédiats grâce à ces décompositions ; de plus, les espaces tangents aux métriques remplissables, déterminés par les théorèmes 9.3 et 10.1, ne s'expriment simplement qu'à l'aide de ces mêmes décompositions.

Références

- [All98] D. Allcock. An isoperimetric inequality for the Heisenberg groups. *Geom. Funct. Anal.*, 8(2):219–233, 1998.
- [BD91] J. Bland and T. Duchamp. Moduli for pointed convex domains. *Invent. Math.*, 104(1):61–112, 1991.
- [BE90] D. M. Burns and C. L. Epstein. Embeddability for three-dimensional CR-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(4):809–841, 1990.
- [Bes87] A. L. Besse. *Einstein manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Biq99] O. Biquard. Quaternionic contact structures. In *Proceedings of the Second Meeting on Quaternionic Structures in Mathematics and Physics, Rome*, 1999.
- [Biq00] O. Biquard. Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques. *Astérisque*, 265, 2000.
- [Bla94] J. Bland. Contact geometry and CR structures on S^3 . *Acta Math.*, 172(1):1–49, 1994.
- [CL95] J. H. Ch  ng and J. M. Lee. A local slice theorem for 3-dimensional CR structures. *Amer. J. Math.*, 117(5):1249–1298, 1995.

- [Eps92] C. L. Epstein. CR-structures on three-dimensional circle bundles. *Invent. Math.*, 109(2):351–403, 1992.
- [FS74] G. B. Folland and E. M. Stein. Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27:429–522, 1974.
- [Gau86] P. Gauduchon. Twisteurs et applications harmoniques en dimension 4. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 4, Année 1985–1986*, pages 35–93. Univ. Grenoble I, Saint, 1986.
- [GL91] C. R. Graham and J. M. Lee. Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball. *Adv. Math.*, 87(2):186–225, 1991.
- [Ham77] R. S. Hamilton. Deformation of complex structures on manifolds with boundary. I. The stable case. *J. Differential Geometry*, 12(1):1–45, 1977.
- [Hit95] N. J. Hitchin. Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations. *J. Differential Geom.*, 42(1):30–112, 1995.
- [Hit97] N. J. Hitchin. Einstein metrics and the eta-invariant. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, 11(2, suppl.):95–105, 1997.
- [Kir79] G. K. Kiremidjian. A direct extension method for CR structures. *Math. Ann.*, 242:1–19, 1979.
- [LeB82] C. LeBrun. \mathcal{H} -space with a cosmological constant. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 380(1778):171–185, 1982.
- [LeB84] C. LeBrun. Twistor CR manifolds and three-dimensional conformal geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284(2):601–616, 1984.
- [LeB85] C. LeBrun. Foliated CR manifolds. *J. Differential Geom.*, 22(1):81–96, 1985.
- [LeB89] C. LeBrun. Quaternionic-Kähler manifolds and conformal geometry. *Math. Ann.*, 284:353–376, 1989.
- [LeB91] C. LeBrun. On complete quaternionic-Kähler manifolds. *Duke Math. J.*, 63(3):723–743, 1991.
- [Lem81] L. Lempert. La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule. *Bull. Soc. Math. France*, 109:427–474, 1981.

- [Lem92] L. Lempert. On three-dimensional Cauchy-Riemann manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(4):923–969, 1992.
- [Ped86] H. Pedersen. Einstein metrics, spinning top motions and monopoles. *Math. Ann.*, 274(1):35–59, 1986.
- [Rum90] M. Rumin. Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 310(6):401–404, 1990.
- [Rum94] M. Rumin. Formes différentielles sur les variétés de contact. *J. Differential Geom.*, 39(2):281–330, 1994.
- [Sal82] S. Salamon. Quaternionic Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 67:143–171, 1982.

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
 Université Louis Pasteur et CNRS,
 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex
 olivier.biquard@math.u-strasbg.fr